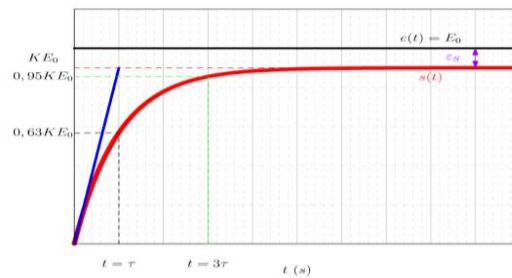
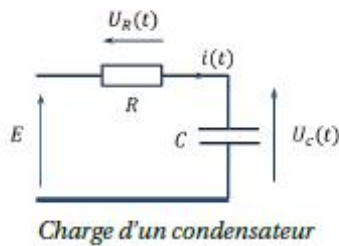


# Cycle 4: Analyser, modéliser et étudier le comportement des Systèmes Linéaires Continus et Invariants

## Chapitre 4 – Prévoir et identifier le comportement des systèmes fondamentaux du 1<sup>er</sup> ordre



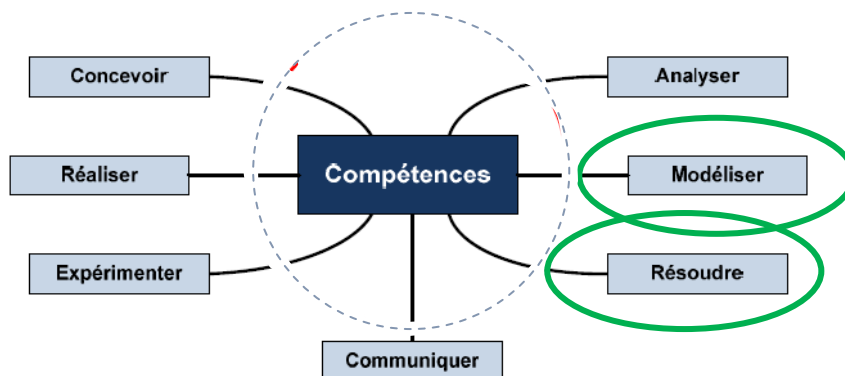
### PROBLÉMATIQUE :

- Le comportement réel de certains systèmes asservis peut se modéliser par des systèmes dits du premier ordre. Comment modéliser de tels systèmes ?

### Savoirs :

- Mod-C2.3 : Modèles canoniques du premier ordre
- Mod-C2-S1 : Identifier le comportement d'un système pour l'assimiler à un modèle canonique, à partir d'une réponse temporelle
- Mod-C2-S2 : Établir un modèle de comportement à partir de relevés expérimentaux
- Mod-C2-S3 : On pourra étudier les systèmes du premier ordre présentant un retard pur

Savoir



## Sommaire

1. <u>Modèle d'analyse des performances des SLCI</u>	3
2. <u>Prévoir le comportement des systèmes élémentaires</u>	4
2.1. Comportement des systèmes proportionnels	4
2.2. Comportement des systèmes intégrateurs	4
3. <u>Prévoir le comportement temporel des systèmes du 1<sup>er</sup> ordre</u>	5
3.1. Caractéristiques de la réponse impulsionnelle	5
3.2. Caractéristiques de la réponse indicielle	6
3.3. Caractéristiques de la réponse en rampe	8
4. <u>Identification à partir du modèle de comportement</u>	10
4.1. Identification par expérimentation sur le système	10
4.2. Système non linéaire	11
4.3. Identification d'un système	11



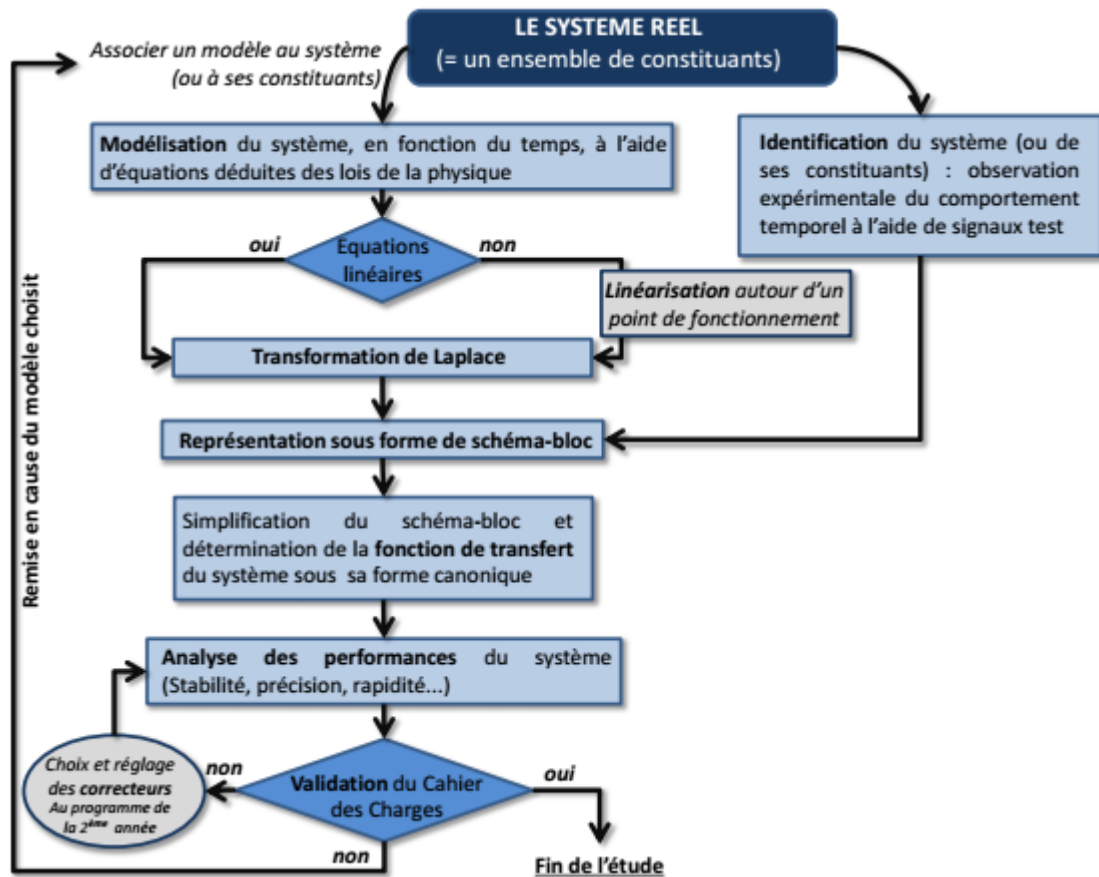
---

## SLCI : étude des systèmes fondamentaux du 1<sup>er</sup> ordre

---

### 1. Méthode d'analyse des performances des SLCI

La méthode permettant d'évaluer les performances d'un SLCI, en vue de la validation de son cahier des charges, est présentée ci-dessous :



Lors de la phase « **analyse des performances** », il est intéressant de connaître par avance le **comportement temporel** (*caractéristiques des réponses temporelles*) des SLCI que l'on est amené à rencontrer fréquemment : **proportionnels, dérivateurs, intégrateurs, 1er et 2ème ordre**.

Il n'est pas possible de connaître leurs réponses pour tous les types d'entrées mis en œuvre par les utilisateurs. Cependant, afin de mieux anticiper leurs réactions et donc leurs performances, nous allons étudier leurs réponses au signal test de référence : **l'échelon**.

Ces résultats permettent aussi de déterminer un modèle d'un système à partir de **résultats expérimentaux** par une « **méthode d'identification** ».

*Remarque : un échelon d'amplitude 1 est appelé échelon unitaire ou échelon indiciel.*



SLCI : étude des systèmes fondamentaux du 1<sup>er</sup> ordre

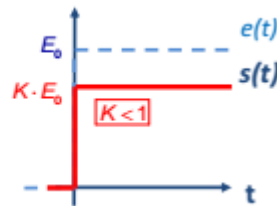
2. Prévoir le comportement temporel des systèmes élémentaires

2.1. Comportement temporel des systèmes proportionnels

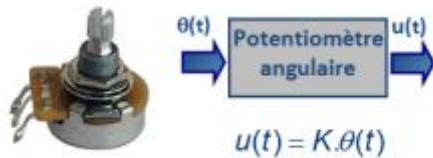
L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un système à action proportionnelle (à gain pur) est :

$s(t) = K \cdot e(t) \text{ pour } t \geq 0$ <p><math>K</math> : gain statique</p>	$\xrightarrow{L}$	$H(p) = K$ <p>unité = <math>\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}</math></p>
--	-------------------	---

La réponse à un échelon d'amplitude  $E_0$  d'un système à action proportionnelle est un échelon d'amplitude  $K E_0$ .  
 $s(t) = K E_0$  pour  $t \geq 0$



Exemple : potentiomètre angulaire du Maxpid



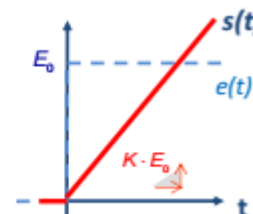
$U_{\text{alim}}$  : Tension aux bornes et  $\theta_c$  : course angulaire

2.2. Comportement temporel des systèmes intégrateur : K/p

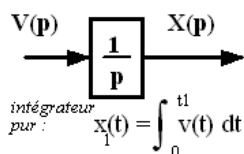
L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un système intégrateur est :

$s(t) = K \int_0^t e(\tau) d\tau \text{ pour } t \geq 0$ <p><math>K</math> : gain statique</p>	$\xrightarrow{L}$	$H(p) = \frac{K}{p}$ <p>unité = <math>\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}} \cdot s^{-1}</math></p>
--	-------------------	--

La réponse à un échelon d'amplitude  $E_0$  d'un système intégrateur est une rampe de pente  $KE_0$ .  
 $s(t) = K E_0 \cdot t$  pour  $t \geq 0$



Exemple : intégrateur vitesse-position





3. Prévoir le comportement temporel des systèmes du 1<sup>er</sup> ordre

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t)$$

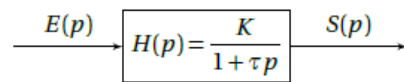
Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On note :

- $\tau$  la constante de temps ( $\tau > 0$ ) ;
- $K$  le gain statique du système ( $K > 0$ ).

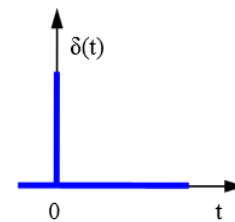
Schéma-bloc d'un système du premier ordre :



3.1. Caractéristiques de la réponse impulsionnelle

Cette fonction modélise une action s'exerçant pendant un temps très court.  
Exemple : chocs tels que l'action d'un marteau ...

La réponse à une impulsion de **Dirac** s'appelle une réponse impulsionnelle avec  $e(t) = \delta(t)$ , soit dans Laplace:  $E(p) = 1$



Réponse temporelle :

$$s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Valeur initiale :

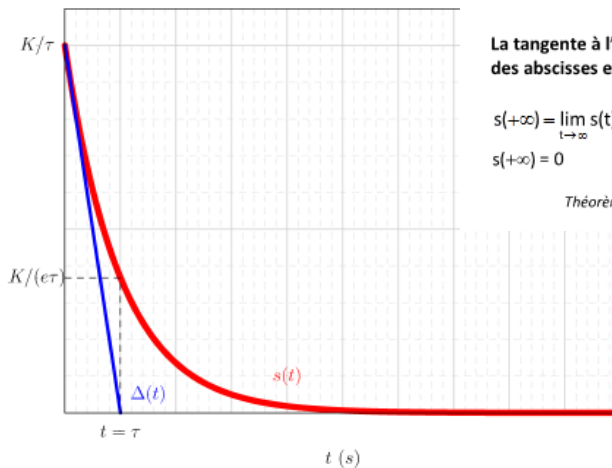
$$s(0) = \frac{K}{\tau}$$

Valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = 0$$

Équation de la tangente à l'origine :

$$\Delta(t) = \frac{K}{\tau} - \frac{K}{\tau^2} t$$



La tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses en  $t = \tau$

$$s(+\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) = 0$$

Théorème de la valeur finale

Éléments de démonstration

Dans le cas d'une réponse impulsionnelle, l'entrée est un Dirac : on a donc  $E(p) = 1$ .

En conséquence,

$$S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

La transformée de Laplace inverse permet de conclure directement que :

$$\forall t > 0 \quad s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

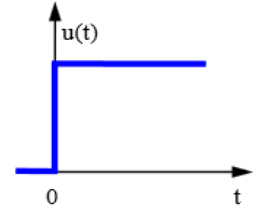


SLCI : étude des systèmes fondamentaux du 1<sup>er</sup> ordre

3.2. Caractéristiques de la réponse indicielle

3.2.1. Echelon unitaire

Cette fonction modélise un signal qui passe très rapidement de 0 à 1 et qui reste ensuite  
*Exemple : appui sur un interrupteur (mise sous tension)*



La réponse à un **échelon d'unité u(t)** s'appelle **une réponse indicielle**.

3.2.2. Réponse à un échelon d'amplitude E<sub>0</sub>

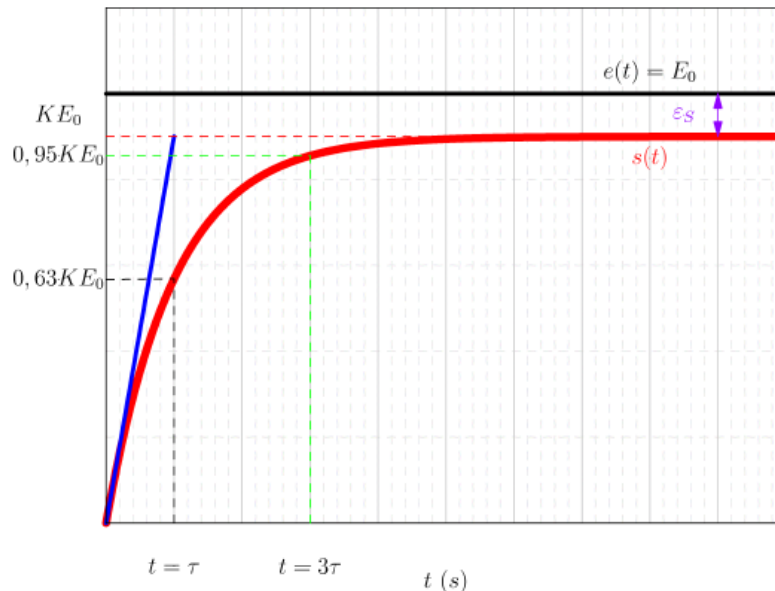
Par définition on rappelle que la réponse indicielle correspond à la courbe de réponse du système sollicité par une fonction échelon d'amplitude E<sub>0</sub> :  $\forall t > 0, e(t) = E_0$ .

Réponse temporelle :	$s(t) = K E_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$
----------------------	---

Valeur initiale :  $s(0) = 0$

Valeur finale :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K \cdot E_0$

Équation de la tangente à l'origine :  $\Delta(t) = \frac{K E_0}{\tau} t$



*CE QU'IL FAUT RETENIR POUR LA REponse INDICIELLE D'UN SYSTEME DU 1ER ORDRE :*

- **Stabilité** : un système du 1<sup>er</sup> ordre est un système stable par définition.
- **Rapidité** → critère :  $tr_{5\%} \approx 3 \cdot \tau$
- **Précision** : l'erreur statique  $\epsilon_s$  est donné pour :  $\epsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t) - s(t)] = E_0 \cdot (1 - K)$



SLCI : étude des systèmes fondamentaux du 1<sup>er</sup> ordre

Démonstration

*Éléments de démonstration*

Dans le cas d'une réponse indicielle, l'entrée est un échelon d'amplitude  $E_0$ , on a donc  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ .

En conséquence,

$$S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{E_0}{p} \cdot \frac{K}{1 + \tau p}$$

$S(p)$  se décompose en éléments simples de la façon suivante :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1 + \tau p} = \frac{E_0 K}{p} - \frac{E_0 K \tau}{1 + \tau p}$$

La transformée de Laplace inverse permet de conclure que :

$$\forall t > 0 \quad s(t) = K E_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

3.2.3. Caractéristiques

- Ordonnée en  $+\infty$  de la courbe de sortie  $s(t)$  :

$$s(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) = K \cdot a \quad \rightarrow \quad s(+\infty) = K \cdot a$$

*Théorème de la valeur finale*

- Pente à l'origine de la courbe de sortie  $s(t)$  :

$$s'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} s'(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot [p \cdot S(p)] = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \cdot \frac{K \cdot a}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)} = \frac{K \cdot a}{\tau} \quad \rightarrow \quad \text{Pente à l'origine} = \frac{K \cdot a}{\tau}$$

*Théorème de la valeur initiale*

*Transformée de la dérivée (CI nulles)*

- Temps de réponse à 5%,  $t_{5\%}$  :

On cherche  $t_{5\%}$  tel que  $s(t_{5\%}) = 0,95 \cdot s(+\infty) = 0,95 \cdot K \cdot a$  Soit  $K \cdot a \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t_{5\%}}{\tau}} \right) = 0,95 \cdot K \cdot a$

$$\rightarrow -e^{-\frac{t_{5\%}}{\tau}} = -0,05 \rightarrow t_{5\%} = -\ln(0,05) \cdot \tau = 3 \cdot \tau \quad \rightarrow \quad t_{5\%} = 3 \cdot \tau$$

- Réponse à  $t = \tau$  :

$$s(\tau) = K \cdot a \cdot (1 - e^{-1}) = 0,63 \cdot K \cdot a \quad \rightarrow \quad s(\tau) = 0,63 \cdot K \cdot a$$

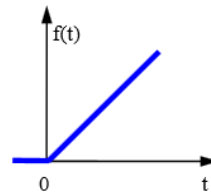




SLCI : étude des systèmes fondamentaux du 1<sup>er</sup> ordre

3.3. Caractéristiques de la réponse à une rampe

Cette fonction modélise un signal en rampe de pente A:



3.3.1. Réponse à une rampe de pente A

On sollicite un système du premier ordre avec une rampe de pente A. On a  $e(t) = At u(t)$  dans le domaine temporel et  $E(p) = \frac{A}{p^2}$  dans le domaine de Laplace.

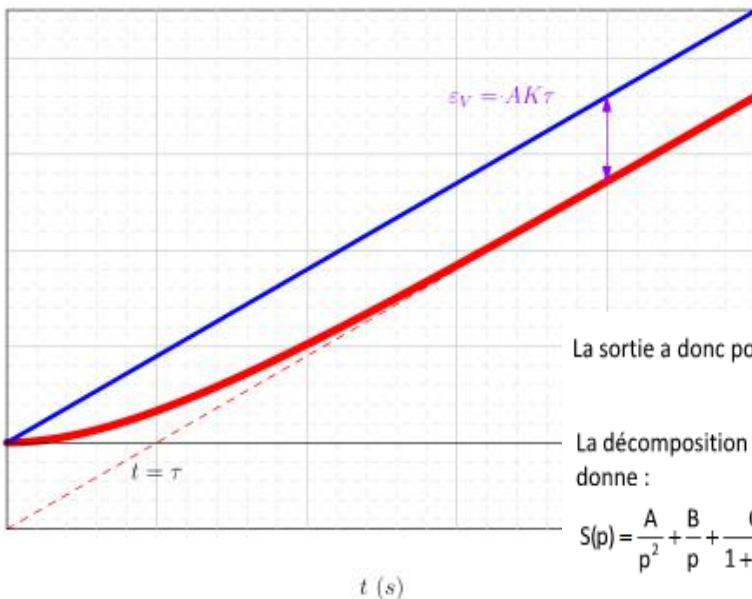
Réponse temporelle :  $s(t) = AK \left( t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$

Valeur initiale :  $s(0) = 0$

Valeur finale :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = +\infty$

Coefficient directeur de l'asymptote en  $+\infty$  :  $AK$

Erreur dynamique :  $AK\tau$



La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace :  $S(p) = \frac{a.K}{p^2 \cdot (1 + \tau.p)}$

La décomposition en éléments simples donne :

$$S(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{1 + \tau.p} = \frac{a.K}{p^2} - \frac{a.K.\tau}{p} + \frac{a.K.\tau^2}{1 + \tau.p}$$

La réponse temporelle a donc pour expression :

$$s(t) = a.K \left( t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$$





SLCI : étude des systèmes fondamentaux du 1<sup>er</sup> ordre

3.3.2. Caractéristiques

- **Pente à l'origine :**

$$s'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} s'(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot [p \cdot S(p)] = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \cdot \frac{a \cdot K}{p^2 \cdot (1 + \tau \cdot p)} = 0$$

Théorème de la valeur initiale

Transformée de la dérivée (CI nulles)

→ **Pente à l'origine = 0**

La tangente à l'origine est une droite horizontale

- **Ordonnée en  $+\infty$  :**

$$s(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) = +\infty \rightarrow \boxed{s(+\infty) = +\infty}$$

Théorème de la valeur finale

- **Etude asymptotique en  $+\infty$  :**

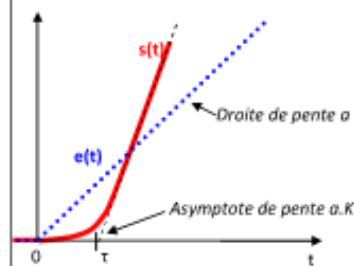
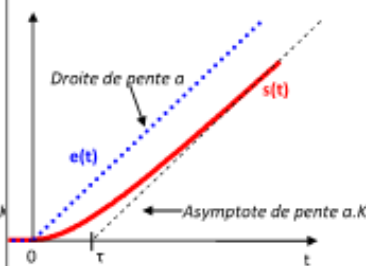
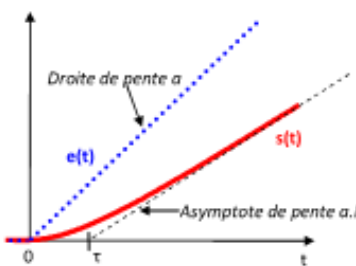
Lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , le terme  $\tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$ , par conséquent  $s(t) \rightarrow a \cdot K \cdot (t - \tau)$ .

L'asymptote est donc  $y(t) = a \cdot K \cdot (t - \tau)$ . Cette asymptote a donc une pente  $a \cdot K$  et coupe l'axe des abscisses en  $t = \tau$ .

Pour  $K < 1$ , l'écart entre l'entrée et la sortie augmente toujours.

Pour  $K = 1$ , le système ne rejoint jamais la consigne mais sa variation est parallèle à l'entrée retardée d'une fois la valeur de la constante de temps.

Pour  $K > 1$ , l'écart entre l'entrée et la sortie diminue, s'annule puis augmente.





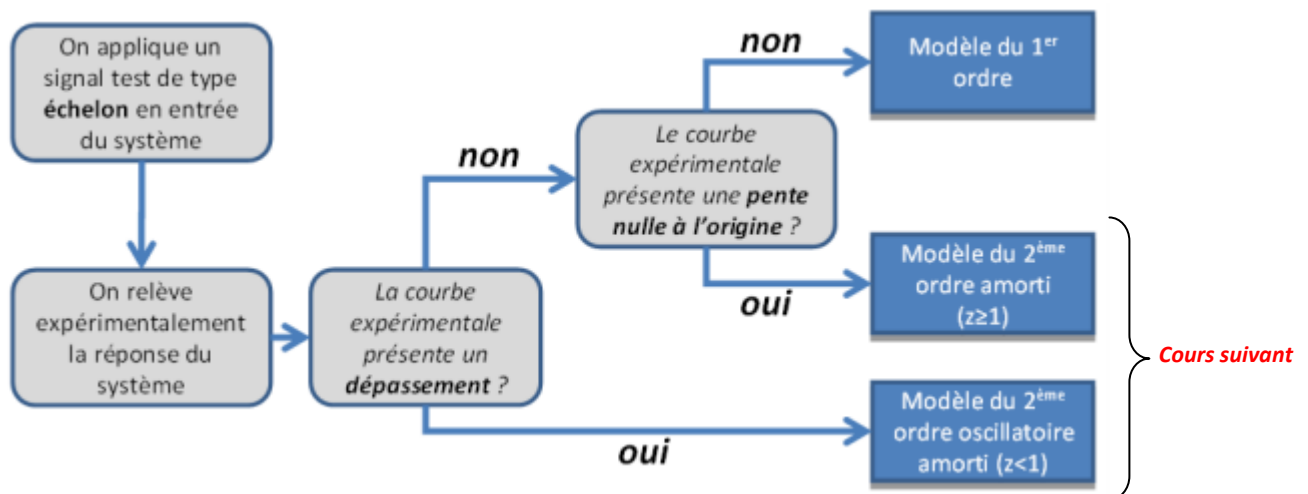
#### 4. Identification à partir du modèle de comportement

Il est parfois nécessaire, ou utile, de modéliser le comportement d'un système à partir de **résultats expérimentaux**, sans passer par un modèle connaissance. On utilise dans ce cas-là une **méthode d'identification**. Cela consiste à **rechercher un modèle en analysant la réponse du système à des entrées connues**, de type **échelon** dans notre cas.

- Le système est considéré comme une « boîte noire ».
- On le soumet à un échelon et on compare les réponses obtenues expérimentalement à un catalogue de réponses types.
- On **identifie les paramètres de sa fonction de transfert sur les relevés expérimentaux** et on établit ainsi un **modèle de comportement du système**.

**Cette démarche permet d'obtenir un modèle qu'il convient de valider en comparant des comportements prévus par simulation avec d'autres résultats expérimentaux.**  
**Cette étape de validation permet aussi d'estimer le domaine de validité du modèle.**

Au regard des caractéristiques des réponses temporelles des systèmes du 1er ordre présentées précédemment, on peut proposer la démarche d'identification ci-contre :



##### 4.1. Identification par expérimentation sur le système

A partir des réponses indicielles ou harmoniques, il est possible d'identifier un premier ordre, un deuxième ordre, un retard... par comparaison aux réponses connues.

Identifier un système physique réel, c'est **déterminer un autre système appelé modèle**.

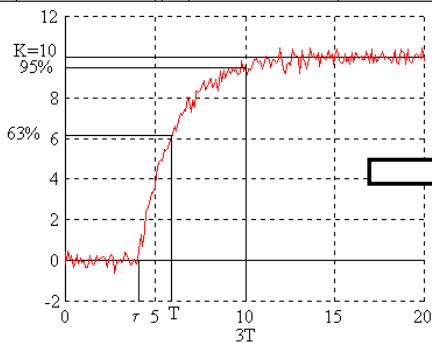
La méthode développée dans la suite est basée sur l'exploitation de l'enregistrement graphique de la réponse du système.

**Cette méthode NE donne PAS LA fonction de transfert du système, mais en donne UNE dont la réponse ressemble à celle du système.**



SLCI : étude des systèmes fondamentaux du 1<sup>er</sup> ordre

Réponse indicielle de type "premier ordre" d'un système à identifier



DETERMINATION DES PARAMETRES DE LA FONCTION DE TRANSFERT:  
K et  $\tau$

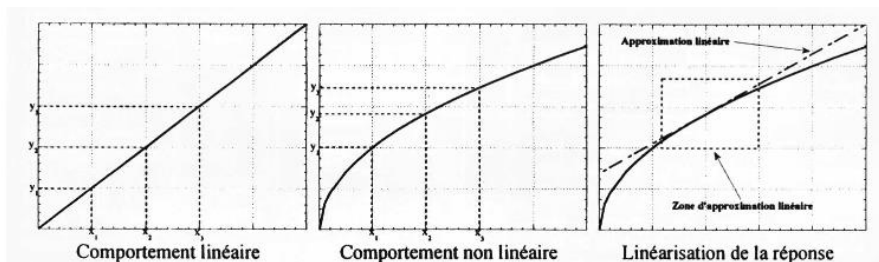
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

fonction de transfert identifiée

4.2. Systemes non linéaires

La plus part des systèmes physiques **ne sont pas linéaires sur toute la totalité de leur domaine d'application**. Ils fonctionnent **en saturation** sur une partie de leur domaine.

Cependant dans de nombreux cas, ils ne sont utilisés que sur une plage réduite de leur domaine. Sous ces conditions, il est possible en général d'approcher le comportement par un modèle linéaire. Le système est dit alors **linéarisé**.



Voici quelques non linéarités remarquables

Dénomination	Saturation	Seuil	Hystérésis
Schéma			
Exemples	Butée mécanique, aimantation, moteur électrique	frottement	Jeux mécaniques, matériaux (élastomère)

Lors d'un essai, lorsque le système est saturé sur une partie de son domaine, il faut bien travailler sur la zone linéaire.



---

**SLCI : étude des systèmes fondamentaux du 1<sup>er</sup> ordre**

---

**4.3. Identification d'un système du 1er ordre**

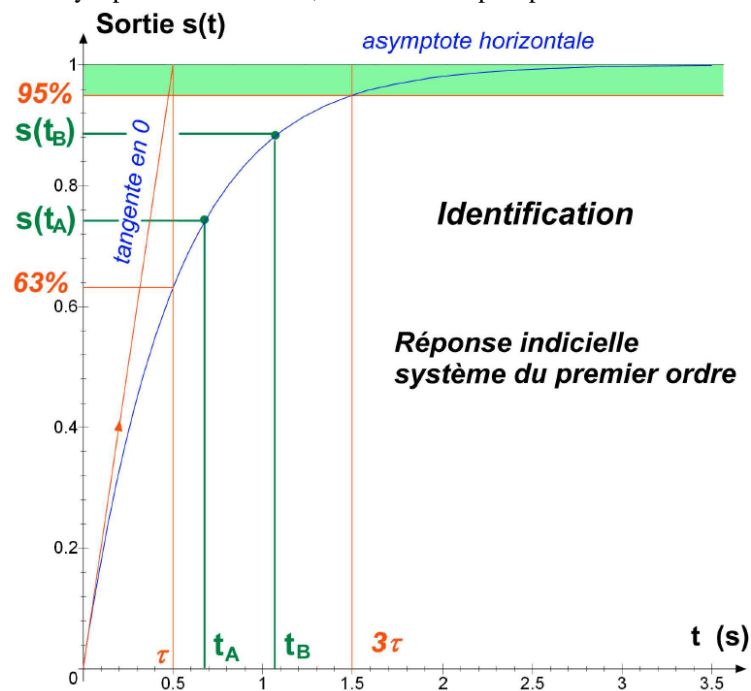
A partir d'un essai de **réponse indicielle sur un système**, l'identification consiste à reconnaître dans le comportement du système étudié, un système connu, puis à en déterminer les caractéristiques.

L'identification d'un premier ordre porte :

- sur l'observation de la **tangente inclinée en zéro**,
- de **l'asymptote horizontale à l'infini**
- et de **l'absence de dépassement**.

Il y a deux caractéristiques à déterminer : **K** et  **$\tau$** .

- la valeur de K est déterminée à partir de l'asymptote horizontale (*ne pas oublier de diviser par la valeur de l'échelon  $E_0$* ).  
On lit  $\rightarrow E_0 \cdot K$
- détermination de  $\tau$  : il y a plusieurs solutions, certaines sont plus précises.



L'idéal est de combiner deux méthodes, cela permet d'éliminer le problème de saturation.

- a – On lit l'abscisse du point qui correspond à 95% de  $E_0 \cdot K \rightarrow 3 \cdot \tau$ . *Méthode peu précise, car au niveau du point mesuré, la courbe est trop "horizontale".*
- b – On lit l'abscisse du point qui correspond à 63% de  $E_0 \cdot K \rightarrow \tau$ . *Méthode assez précise, car au niveau du point mesuré, la courbe présente une tangente éloignée de zéro.*
- c – On trace la tangente en zéro, on sait qu'elle coupe l'asymptote pour  $t = \tau$ . *Là encore la méthode n'est pas précise, le tracé d'une tangente est délicat.*



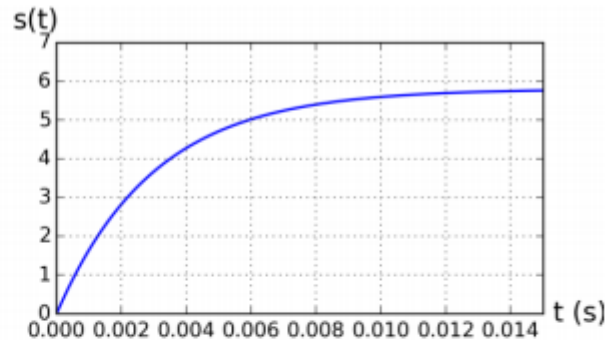
SLCI : étude des systèmes fondamentaux du 1<sup>er</sup> ordre

**Exemple** : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue et dont la réponse à un échelon d'amplitude  $E_0=2$  obtenue expérimentalement, est donnée ci-contre.

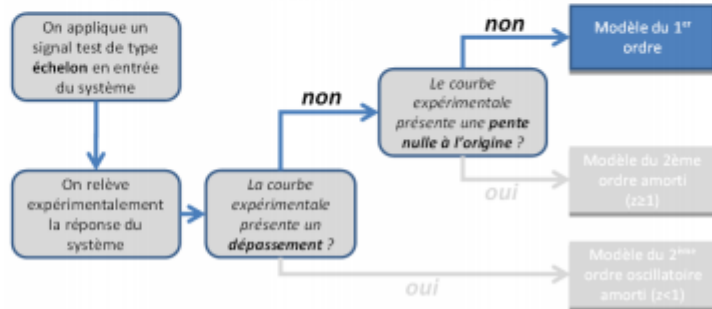
Elle s'apparente à la réponse d'un système du 1<sup>er</sup> ordre.

Cette simple observation permet, a priori, de proposer comme modèle de comportement du système, une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$



**Identifier** le système revient dans ce cas à déterminer les valeurs du gain statique  $K$  et de la constante de temps  $\tau$ .



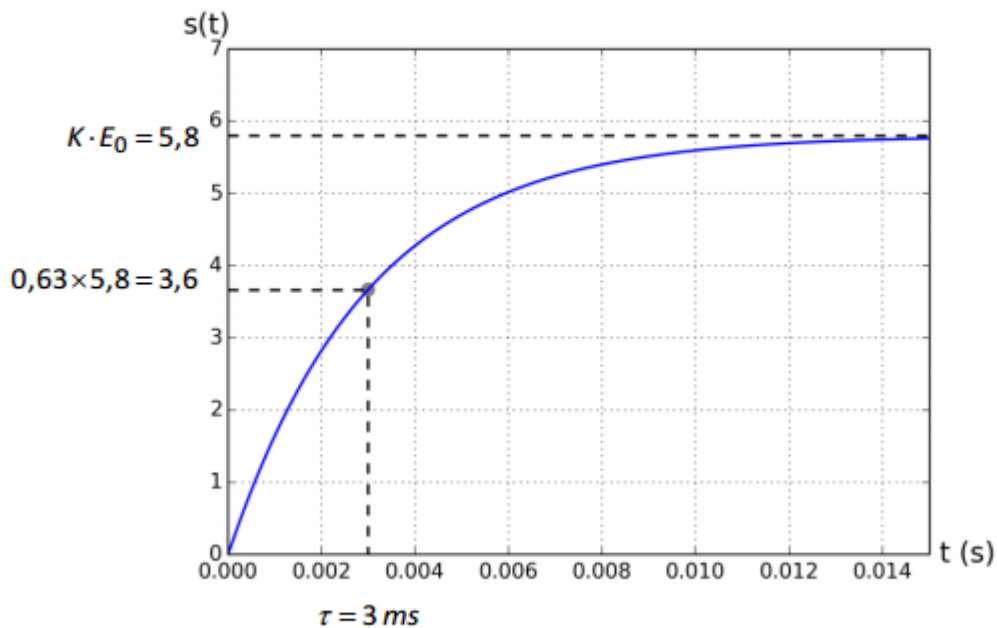
**Application** : à partir de la réponse expérimentale à un échelon d'amplitude 2, identifier les paramètres du système modélisé par un premier ordre.

A4 - Identifier la valeur de  $K$

La valeur finale vérifiée :  $s(+\infty) = KE_0$  , d'ou  $K=5,8/2=2,9$

A5 - Identifier la valeur de  $\tau$

$0,63 \times s(+\infty) = 3,6$  , correspondant à un temps de 3 ms.



A6 - En déduire la fonction de transfert du premier ordre.

$$H(p) = \frac{2,9}{1 + 3 \cdot 10^{-3} p}$$