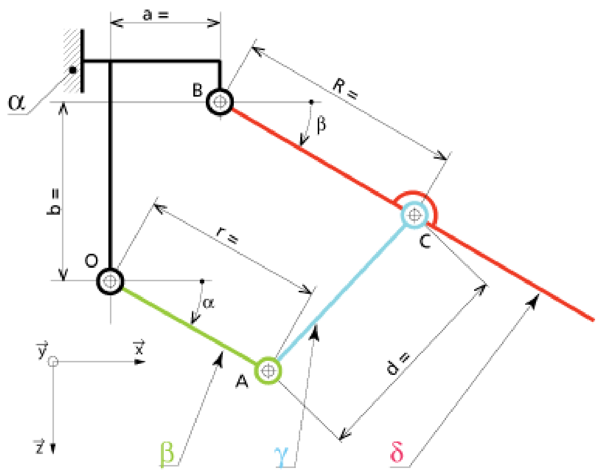
# <u>Cycle 5:</u> Modélisation, prévision et vérification du comportement cinématique des systèmes mécaniques

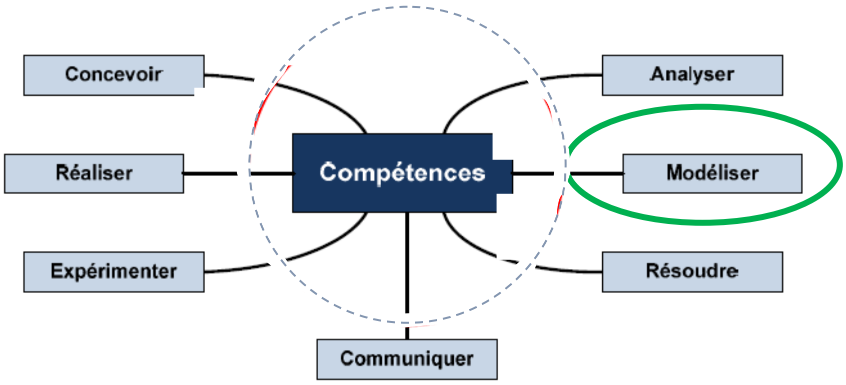
## <u>Chapitre 3</u> – Paramétrage géométrique des mécanismes




La cinématique du solide indéformable fait intervenir des solides en mouvement relatifs les uns avec les autres. Afin de connaître la position d'un point appartenant à un solide ou la position d'un point appartenant à un autre solide, il est nécessaire de réaliser le paramétrage du système, à partir du schéma cinématique.

*Savoir*

- Mod-C11-S1 : Associer un repère à un solide.
- Mod-C11-S2 : Identifier les degrés de liberté d'un solide en mouvement par rapport à un repère.
- Mod-C11-S3 : Réaliser le paramétrage d'un mécanisme simple.



# Sommaire

# Paramétrage géométrique des mécanismes

Un **mécanisme** est un ensemble de pièces associées par l'intermédiaire de **liaisons mécaniques** afin de transformer un mouvement, de transmettre un effort, une puissance…

Pour étudier un tel système, on élabore un **modèle mathématique** simplifié, qui repose sur un certain nombre d'hypothèses et de techniques fondamentales.

## 1. Objectif de l'étude géométrique

L'étude géométrique consiste à déterminer la(les) relation(s) entre les « positions » des différentes pièces. En particulier, elle sert à déterminer la **loi entrée/sortie** d'un mécanisme.

Mouvement d'entrée (actionneur) → mécanisme → Mouvement de sortie (effecteur)

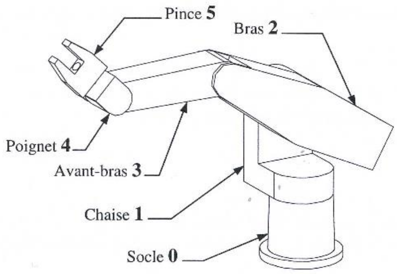
## 2. Solide indéformable

En **cinématique du solide**, et notamment en avant-projet, on utilise souvent le modèle de solide localement et globalement indéformable. Les pièces sont supposées **infiniment rigides**.

Un solide S est dit indéformable lorsqu'à tout instant t, la distance entre deux points quelconques A et B de S, la distance AB reste constante au cours du temps.

Mathématiquement, on peut écrire que : $\forall A \in S \quad \forall B \in S$

$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = cste$ .




## 3. Paramétrage de la position relative de 2 solides

Pour cela il faut introduire des grandeurs géométriques qui traduisent les positions relatives entre les différentes pièces : ces grandeurs s'appellent les **paramètres**.

### 3.1. Repère lié à un solide indéformable

A tout solide indéformable S, on associe un repère R(O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ) constitué de :

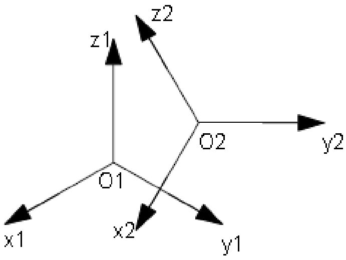
- une origine O : point quelconque de S
- une base vectorielle ( $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ) : triplet de vecteurs non coplanaires (ou non colinéaires dans le cas d'une base bidimensionnelle) **de directions fixes par rapport à S**.

L'intérêt de la définition de R(O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ) est double :

1- repérer tout point de l'espace par rapport à S par ses coordonnées dans R,
2- définir simplement la position de S par rapport à un repère de référence $R_0$(O, $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ ).

### 3.2. Paramètres nécessaires au positionnement relatif de 2 solides

**Paramétrer**, c'est choisir un ensemble de variables permettant de décrire toutes les configurations géométriques possibles du mécanisme étudié.




La position relative de deux solides s'étudie par l'intermédiaire de la position relative des deux repères associés à chacun d'eux.

Il suffit de choisir astucieusement **six paramètres indépendants** pour passer d'un repère (R1) à un repère (R2).

1- On associe à chaque solide un repère qui lui est lié :
   - solide $S_1 \leftrightarrow R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
   - solide $S_2 \leftrightarrow R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

2- On définit la **position de l'origine O₂** par rapport au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ : cela nécessite 3 paramètres de position (cartésiens, polaires, sphériques).

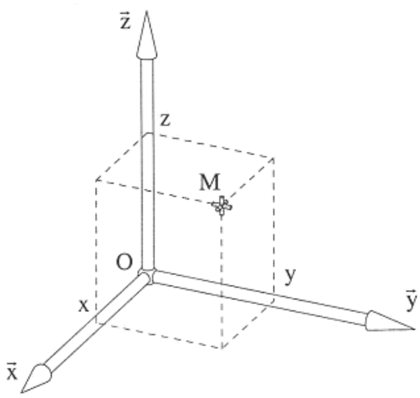
3- On définit la **position de la base B₂**$(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ par rapport au repère $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ : cette opération d'orientation nécessite la définition de 3 paramètres angulaires

## 4. Position d'un point par rapport à un repère

Soient un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et un point M quelconque de l'espace.
Les 3 possibilités de repèrage de ce point les plus fréquentes sont :

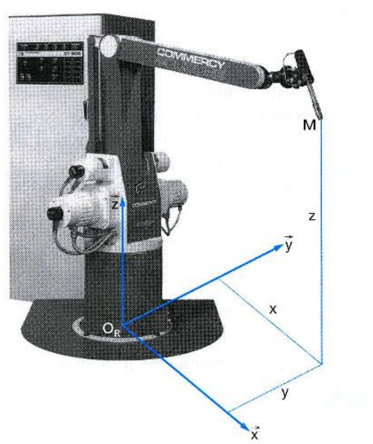
### 4.1. Coordonnées cartésiennes

Le cas le plus usuel de repérage du point M consiste à exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ -dit vecteur position- dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ :



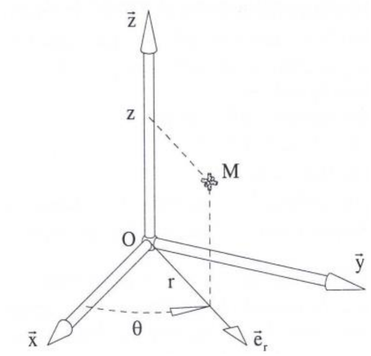

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z}$$

exemple : position du point M situé à l'extrémité d'une buse de soudage par rapport au socle fixe du robot de soudage

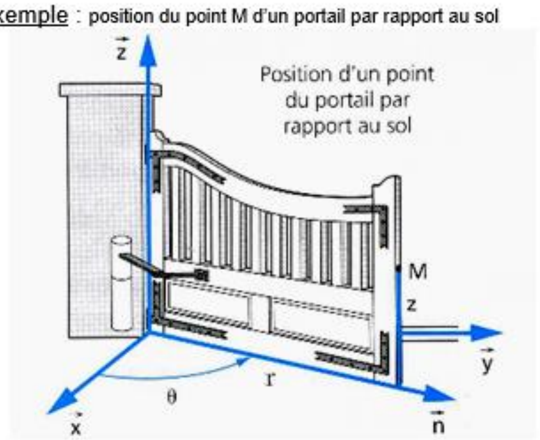


### 4.2. Coordonnées cylindriques

Cette méthode de repérage est plus adaptée aux problèmes axisymétriques.
Elle utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z).




exemple : position du point M d'un portail par rapport au sol




Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'exprime sous la forme :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r + z.\vec{z}} \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} r \in [0,\infty[ \\ \theta \in [0,2\pi[ \\ z \in ]-\infty,\infty[ \end{cases}$$

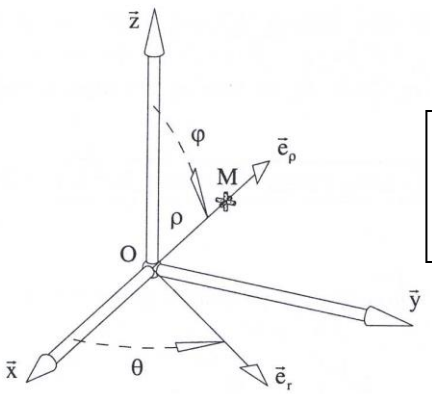
On montre les correspondances suivantes :

$$\boxed{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}} \rightarrow \quad \begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{matrix}$$

### 4.3. Coordonnées sphériques

La dernière méthode classique consiste à utiliser les coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) du point M.
Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'exprime alors sous la forme :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{e}_\rho} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho \in [0,\infty[ \\ \theta \in [0,2\pi[ \\ \varphi \in [0,\pi] \end{cases}$$

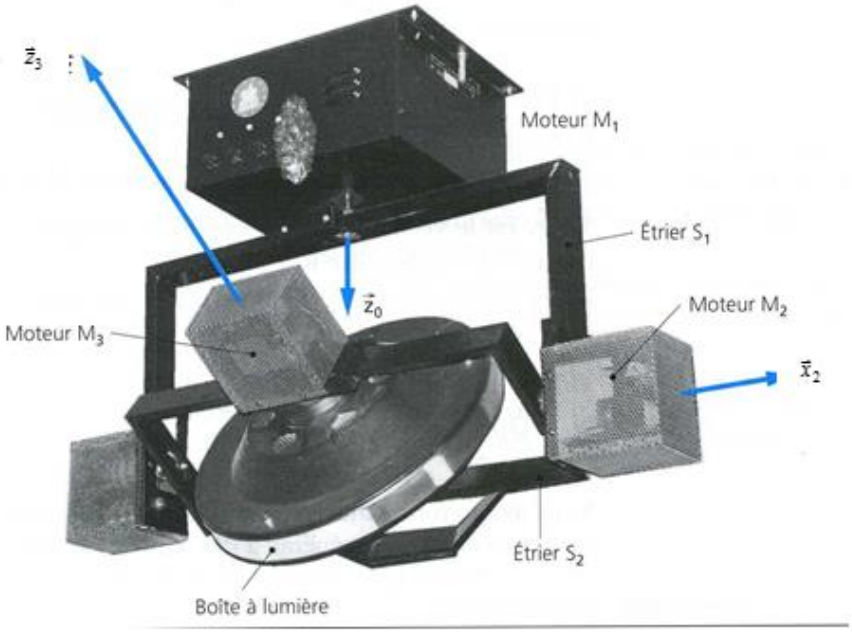



$$\boxed{\begin{cases} x &= \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y &= \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\varphi \end{cases}}$$

## 5. Orientation relative angulaire de plusieurs bases

*Exemple de la boîte à lumière :*

les 3 moteurs $M_1$, $M_2$ et $M_3$ entraînent respectivement l'étrier $S_1$ autour de $\vec{z}_0$ (angle ψ), l'étrier $S_2$ autour de $\vec{x}_2$ (angle θ) et la boîte à lumière autour de l'axe $\vec{z}_3$ (angle φ), afin que la lumière soit « spatiale ».




Pour situer l' « espace » attaché à la boîte à lumière par rapport à l' « espace » associé à celui du moteur $M_1$ (considéré comme fixe), il nous faut définir la situation relative des repères attachés à ces espaces.

### *Les angles d'Euler :*

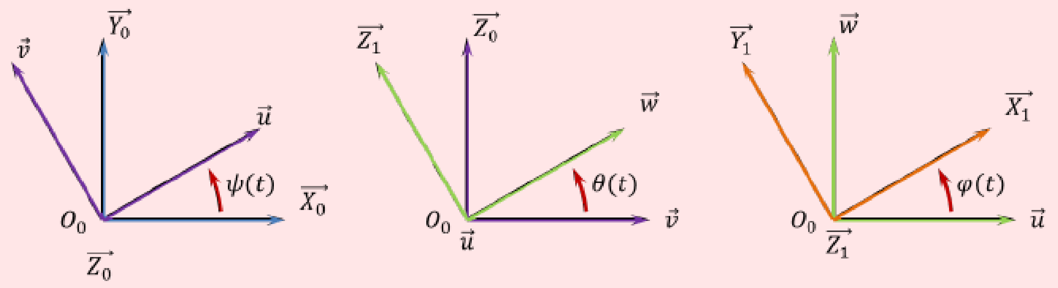
*Méthode*

Lorsqu'il existe plusieurs rotations entre 2 solides, il faut faire un choix pour paramétrer les 3 rotations (c'est à dire, pour chacune des rotations, on se demande autour de quel axe on doit tourner). Pour paramétrer 3 rotations, on utilise classiquement les angles d'Euler. Ainsi pour passer du repère $\mathscr{R}_0$ au repère $\mathscr{R}_1$ on procède ainsi.

1. La première rotation est appelée précession. Par une rotation d'angle $\psi(t)$ autour de $\overrightarrow{Z_0}$ on passe du repère $\left(\overrightarrow{X_0};\overrightarrow{Y_0};\overrightarrow{Z_0}\right)$ au repère $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{Z_0}\right)$.
2. La seconde rotation est appelée nutation. Par une rotation d'angle $\theta(t)$ autour de $\overrightarrow{u}$ on passe du repère $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{Z_0}\right)$ au repère $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w};\overrightarrow{Z_1}\right)$.

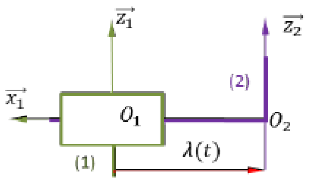
*Méthode*

3. La dernière rotation est appelée rotation propre. Par une rotation d'angle $\varphi(t)$ autour de $\overrightarrow{Z_1}$ on passe du repère $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w};\overrightarrow{Z_1}\right)$ au repère $\left(\overrightarrow{X_1};\overrightarrow{Y_1};\overrightarrow{Z_1}\right)$.



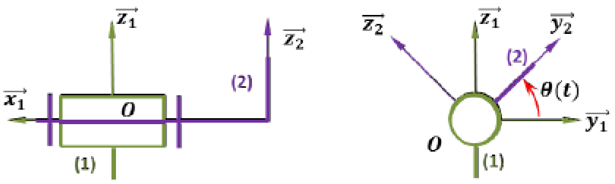

## 6. Paramétrage des liaisons cinématiques simples

### 1 Paramétrage de la liaison glissière

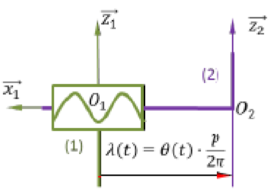



$\overrightarrow{O_1O_2} = \lambda(t)\overrightarrow{x_1}$

### 2 Paramétrage de la liaison pivot

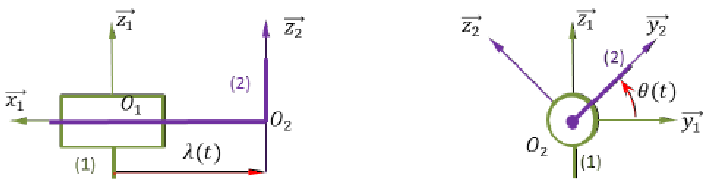



### 3 Paramétrage de la liaison glissière hélicoïdale




$\overrightarrow{O_1O_2} = \lambda(t)\overrightarrow{x_1}$

### 4 Paramétrage de la liaison pivot glissant




$\overrightarrow{O_1O_2} = \lambda(t)\overrightarrow{x_1}$