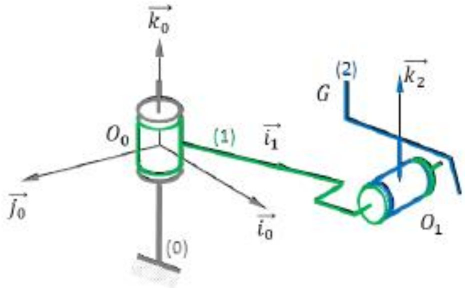
Cycle 5: Modélisation, prévision et vérification du comportement cinématique des systèmes mécaniques

Chapitre 1 : Cinématique du point

Centrifugeuse humaine développée par le CNRS / MEDES [1]

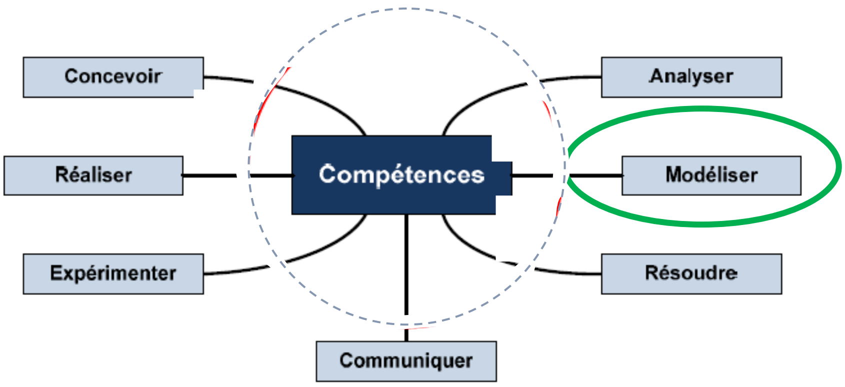


Modélisation cinématique

Savoir

Savoirs :

- Mod-C11 : Modélisation géométrique et cinématique des mouvements entre solides indéformables
  - Mod-C11.2 : Champ des vecteurs vitesses des points d'un solide
  - Mod-C11.4 : Composition des vitesses
  - Mod-C11.6 : Champ des vecteurs accélérations des points d'un solide
  - Mod-C11.6 : Composition des accélérations
  - Mod-C11-S5 : Déterminer la trajectoire d'un point d'un solide
  - Mod-C11-S8 : Écrire le vecteur accélération d'un point d'un solide



Sommaire

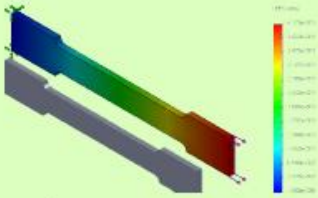
1 Avant propos

1.1 Notion de solide indéformable

Lorsqu'un objet ou un système est soumis à des efforts, il peut subir, suivant la nature du matériau de grandes ou de petites déformations.

Exemple

Pâte à modeler [2]



Éprouvette de traction

- pale d'hélicoptère soumis à une force centrifuge ;
- fluides ...

Dans le cadre du programme de CPGE (PTSI et PT), plusieurs hypothèses peuvent être retenues. En résistance des matériaux (programme de PT), ou lors des essais sur les matériaux (essai de traction par exemple), les matériaux sont considérés comme déformables. En effet, on observe la déformation de la matière au cours du temps.

En cinématique (PTSI), en statique (PTSI) et en dynamique (PT) les solides seront considérés comme indéformables. On considère en effet que les déformations sont négligeables par rapport aux études réalisées.

Hypothèse

Solide indéformable

On considère deux points A et B d'un solide indéformable noté S. On note t le temps.

$$\forall A, B \in S, \forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB(t)}^2 = \text{constante}$$

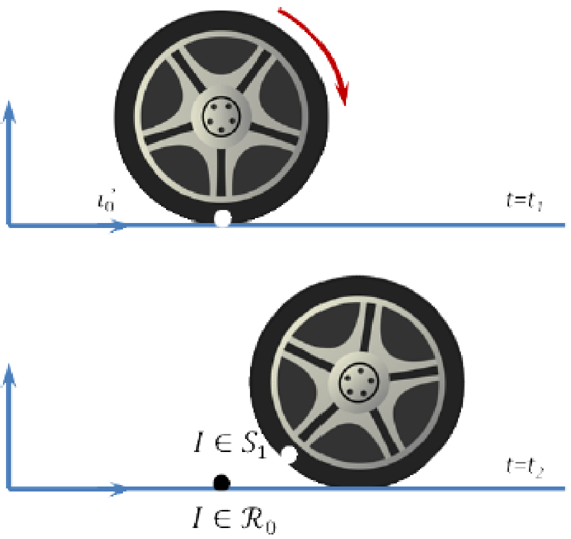
Remarque

En cinématique du solide indéformable, les fluides et les ressorts ne seront pas étudiés.

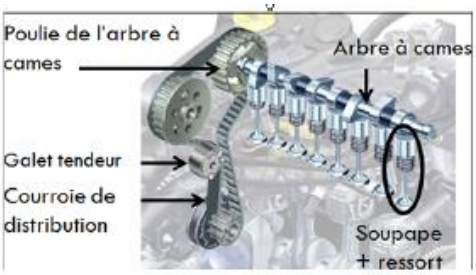
1.2 Notion de point appartenant à un solide

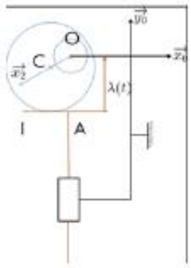
Attention

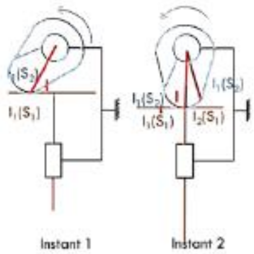
En cinématique, il faudra vérifier si les points considérés sont bien des points matériels des solides considérés.



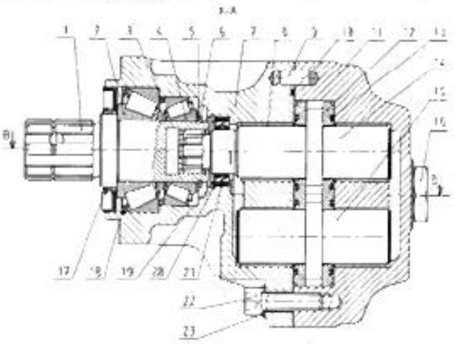
Dans le cas d'une roue de voiture, le point de contact entre la roue et le sol n'est pas un point matériel, il change au cours du temps...

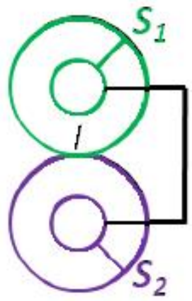






... il en est de même pour le point de contact entre la came et le plateau.





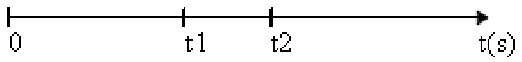
Dans une transmission par engrenage simple, on modélise le contact entre S_1 et S_2 par un point qui est fixe par rapport au bâti. Ce point n'appartient ni au solide 1, ni au solide 2.

2. <u>Mouvement relatif de 2 solides</u>

2.1. <u>Référentiel : espace, temps</u>

a. Repère de temps

Un **repère de temps** est orienté dans le sens de la succession des événements dans le temps.
Chaque point de ce repère est appelé **instant**.
L'abscisse de l'instant est appelé **date** (t). L'unité de durée est la **seconde** (s).



b. Repère d'espace

Un **repère d'espace** est constitué par un **point origine** O et une **base orthonormée** ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$), liés à l'espace.
On le note : R(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$)

c. Référentiel

Un **référentiel** est constitué d'un **repère de temps** et d'un **repère d'espace**.
En mécanique classique, le repère de temps est unique.

2.2. <u>Repères d'étude</u>

Etudier le mouvement d'un solide indéformable, reviendra à étudier le mouvement du repère auquel il est lié.
Le choix d'un repère lié à un solide doit être judicieux.
On est alors amené à choisir des **points** et des **directions caractéristiques** (zones de contact entre solides, axes ou plan de symétrie, axe de révolution,...).

2.3. <u>Point mobile par rapport à un référentiel : trajectoire, vitesse, accélération</u>

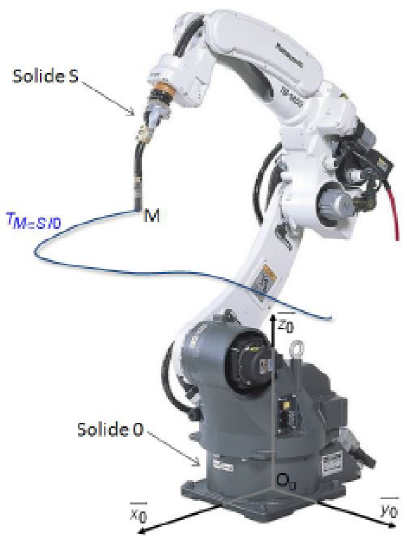
a. Trajectoire d'un point M

> La **trajectoire** d'un **point** *M* appartenant[1] à un solide *S*, **par rapport** à un **solide de référence** *0*, est **le lieu des positions successives occupées par ce point** au cours du temps **dans le repère de référence :**
>
> **Notation :** $T_{M \in S/0}$.

Exemple : le point *M* est un point situé à l'extrémité de la buse de soudage (solide *S*) du robot soudeur. La trajectoire $T_{M \in S/0}$ correspond au cordon de soudure réalisé par le robot.
Le repère de référence $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est lié au socle du robot (solide 0).

La trajectoire peut être :

- **rectiligne**, si la trajectoire est un segment de droite ;
- **circulaire**, si la trajectoire est un arc de cercle ;
- **quelconque**, si la trajectoire est une courbe quelconque.

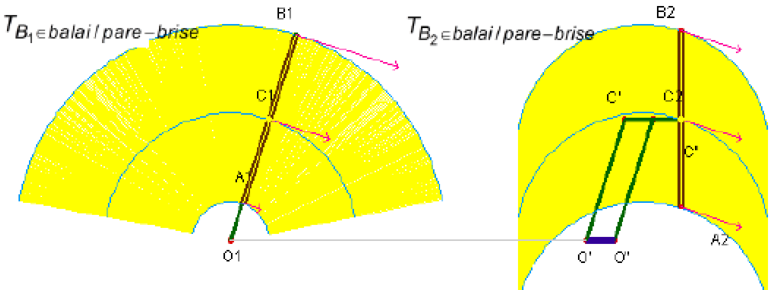


Exemples :

Les trajectoires de points appartenant à un solide en mouvement de **translation à trajectoire rectiligne** sont des **segments de droite**.

Les trajectoires de points appartenant à un solide en mouvement de **translation à trajectoire circulaire** (exemple : balai d'un essuie-glace d'autobus ci-dessous) sont des **arcs de cercle de même rayon**.

Les trajectoires de points appartenant à un solide en mouvement de **rotation autour d'un axe fixe** (exemple : balai d'un essuie-glace de voiture ci-dessous) sont des **arcs de cercle de même axe**.



Essuie-glace de voiture *Essuie-glace d'autobus*

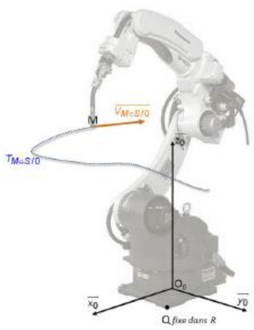
b. Vecteur vitesse

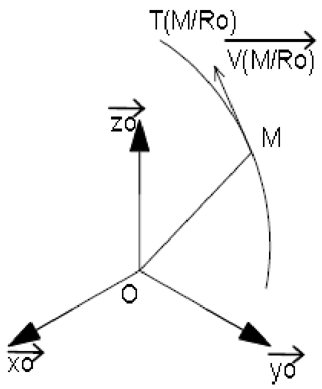
Le **vecteur vitesse instantanée** d'un point M par rapport à (R_0) à l'instant t est :

Point O :origine du repère par rapport auquel on calcule la vitesse du point M, le point O étant remplaçable par tout autre point fixe par rapport à R_0

$$\boxed{\vec{V}_{(M/R_0)} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}(t)\right]_{R_0}}$$

R_0 : repère par rapport auquel on calcule la vitesse du point M





Il est toujours tangent à la trajectoire $\boldsymbol{T}(M / R_0)$.

Attention

– Attention à respecter rigoureusement la notation.
– La vitesse dépend du point d'application.
– Attention, « dériver un vecteur par rapport à une base » est différent de « exprimer un vecteur dans une base».

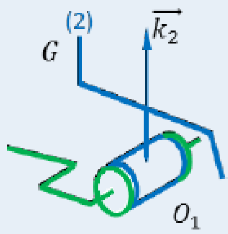
Remarque

Lorsqu'un point est confondu pour deux solides et qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre les solides, (centre d'une liaison pivot ou d'une liaison rotule par exemple) les vitesses sont égales ainsi, ici :

$$\overrightarrow{V(0_1 \in S_1/S_0)}(t) = \overrightarrow{V(0_1 \in S_2/S_0)}(t)$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(0_1 \in S_1/S_2)}(t) = \vec{0}$$



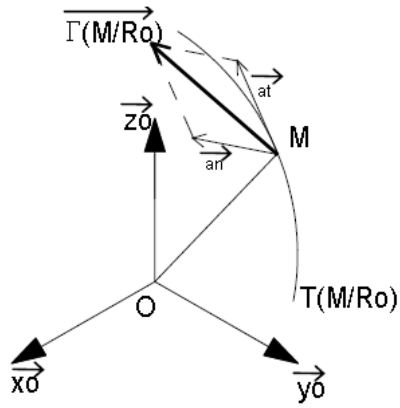
c. Vecteur accélération

Le **vecteur accélération instantanée** d'un point M par rapport à (R_0) à l'instant t est :

Point O :origine du repère par rapport auquel on calcule l'accélération du point M, le point O étant remplaçable par tout autre point fixe par rapport à R_0

$$\boxed{\vec{\Gamma}_{(M/R_0)} = \left[\frac{d\vec{V}_{(M/R_0)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM}(t)\right]_{R_0}}$$

R_0 : repère par rapport auquel on calcule l'accélération du point M



L'accélération est toujours dirigée vers l'intérieur de la trajectoire.
Elle peut être décomposée en deux composantes :

- $\vec{a}_t$: **accélération tangentielle** à la trajectoire ;
- $\vec{a}_n$: **accélération normale** à la trajectoire.

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_{(M/R_0)} = \vec{a}_{t(M/R_0)} + \vec{a}_{n(M/R_0)}$$

Dans le cas général, les vecteurs -position, vitesse et accélération- n'ont pas une direction constante.

Leur dérivation va donc demander la connaissance de la formule de dérivation composée.

3. Formule de dérivation composée

3.1. Dérivée d'un vecteur mobile par rapport à un repère

Soit le vecteur $\vec{U}(t) = u_x\,\vec{x} + u_y\,\vec{y} + u_z\,\vec{z}$, exprimé dans le repère (R_1), avec : u_x, u_y, u_z fonctions du temps.

La dérivée par rapport au temps de ce vecteur par rapport à un repère (R_0) -mobile par rapport à (R_1)-, est :

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_0} = \dot{u}_x\,\vec{x} + u_x\left[\frac{d\vec{x}}{dt}\right]_{R_0} + \dot{u}_y\,\vec{y} + u_y\left[\frac{d\vec{y}}{dt}\right]_{R_0} + \dot{u}_z\,\vec{z} + u_z\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{R_0}$$

Il reste donc à savoir calculer les dérivées des vecteurs unitaires.

Cas particulier :si les vecteurs unitaires de (R_1) sont constants dans (R_0), alors :

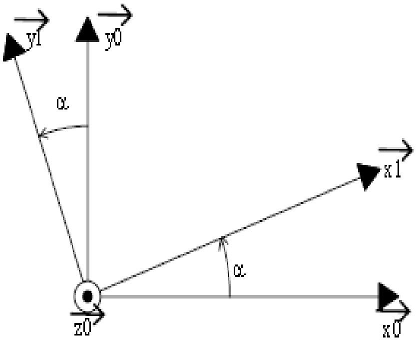
$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_0} = \dot{u}_x\,\vec{x} + \dot{u}_y\,\vec{y} + \dot{u}_z\,\vec{z}$$

Remarque très importante : la base de dérivation n'est pas forcément la même que la base de projection.

3.2. Vecteur vitesse de rotation d'un repère en mouvement par rapport à un autre repère

a. Cas particulier d'un repère ayant une direction fixe par rapport au repère de référence :

Ce cas particulier concerne tous les mouvements plans (bielle - manivelle, engrenages, tige - came, etc.).
Soit (R_0) le repère de référence et (R_1), un repère tournant par rapport à celui-ci.
On choisit arbitrairement : $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$.
L'**orientation de la base** de (R_1) par rapport à celle de (R_0) peut alors se faire par **un seul paramètre** :



$$\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$$

Introduisons alors le **vecteur vitesse de rotation** de la base de (R_1) par rapport à la base de (R_0) :
(appelé aussi taux de rotation) :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\alpha}(t)\ \vec{z}_{0,1}}$$

aussi noté $\vec{\Omega}_{1/0}$.

Important : $\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = -\vec{\Omega}_{R_0/R_1}$

b. Cas général

On suppose que l'orientation de la base de (R_1) par rapport à (R_0), est définie par trois angles α1, α2, α3, mesurés respectivement autour des vecteurs unitaires quelconques :

$$(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$

Introduisons alors le **vecteur vitesse de rotation** de la base de (R1) par rapport à la base de (R0),

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}_1(t)\ \vec{u}_1 + \dot{\alpha}_2(t)\ \vec{u}_2 + \dot{\alpha}_3(t)\ \vec{u}_3$$

c. Composition des vecteurs vitesses de rotation

Soit n repères d'espace (R_i) et $\vec{U}(t)$, un vecteur quelconque.

On peut écrire que :

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_2} + \vec{\Omega}_{(R_2/R_1)} \wedge \vec{U}(t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_{n-1}} = \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_n} + \vec{\Omega}_{(R_n/R_{n-1})} \wedge \vec{U}(t)$$

En ajoutant membre à membre, il vient :

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_n} + \left(\vec{\Omega}_{(R_n/R_{n-1})} + \ldots + \vec{\Omega}_{(R_2/R_1)}\right) \wedge \vec{U}(t)$$

or, on peut également écrire : $\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_n} + \vec{\Omega}_{(R_n/R_1)} \wedge \vec{U}(t)$

On en déduit la relation de **composition des vecteurs vitesses de rotation** :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{(R_n/R_1)} = \vec{\Omega}_{(R_n/R_{n-1})} + \ldots + \vec{\Omega}_{(R_2/R_1)}}$$

3.3. Dérivation composée d'un vecteur dans une base mobile :

Dérivation vectorielle

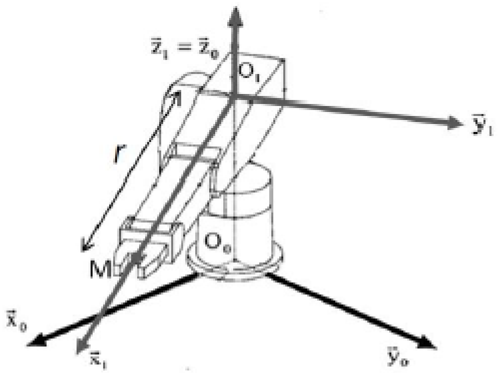
Soient S_0 et S_1 deux solides en mouvements relatifs et $\mathscr{R}_0$ et $\mathscr{R}_1$ les repères orthonormés directs associés. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de l'espace. On note $\overrightarrow{\Omega(\mathscr{R}_1/\mathscr{R}_0)}$ le vecteur instantané de rotation permettant d'exprimer les rotations entre chacune des deux bases.

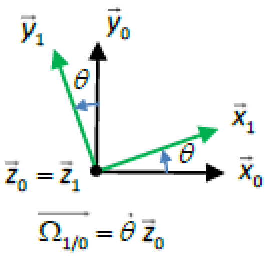
La dérivée d'un vecteur dans une base mobile se calcule donc ainsi :

$$\boxed{\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} \wedge \vec{U}(t)}$$

Application : bras manipulateur.

On considère le bras 1 en rotation d'axe $(O_0, \vec{z}_0)$ par rapport à 0.





Champ des vecteurs vitesse d'un solide en rotation : $\vec{V}_{M\in 1/0} = r\,\dot{\theta}\,\vec{y}_1$.

Le vecteur accélération :

$$\vec{A}_{M\in 1/0} = \left[\frac{d\vec{V}_{M\in 1/0}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d(r\,\dot{\theta}\,\vec{y}_1)}{dt}\right]_0 = r\,\ddot{\theta}\,\vec{y}_1 + r\,\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_0$$

avec $\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_0 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{y}_1 = \dot{\theta}\,\underbrace{\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1}_{-\vec{x}_1} = -\dot{\theta}\,\vec{x}_1$

Soit : $\vec{A}_{M\in 1/0} = r\,\ddot{\theta}\,\vec{y}_1 - r\,\dot{\theta}^2\,\vec{x}_1$. **Relation homogène.**