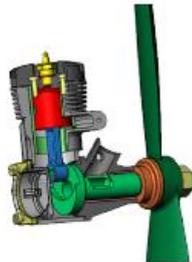


Cycle 5: Modélisation, prévision et vérification du comportement cinématique des systèmes mécaniques

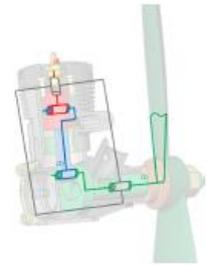
Chapitre 3 : Etude des chaînes fermées – Lois Entrée / Sortie



Trainer Solo Sport [1]



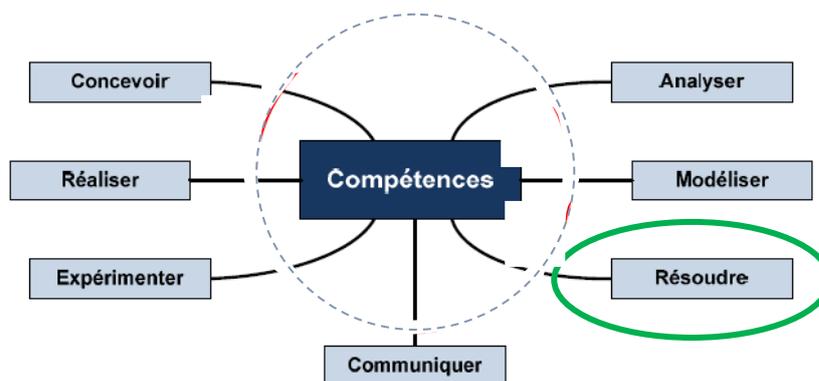
Modèle CAO d'un moteur de modélisme [2]



Modélisation par schéma cinématique

Savoir

- Rés-C1.1 : Appréhender les chaînes cinématiques ouvertes et fermées
- Rés-C1.2 : Etablir une loi E/S par fermeture géométrique
- Rés-C1.3 : Etablir une loi E/S par produit scalaire de 2 vecteurs orientés constants
- Rés-C1.4 : Etablir une loi E/S par fermeture cinématique



Sommaire

1. <u>Cadre d'application</u>	3
2. <u>Chaine cinématique ouverte</u>	3
3. <u>Chaine cinématique fermée</u>	6
3.1. Loi ES par fermeture géométrique	6
3.2. Loi ES par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante	8
3.3. Loi ES par fermeture cinématique	9
4. <u>Les mécanismes de transformation de mouvement</u>	10

1 CADRE D'APPLICATION

La loi Entrée/Sortie cinématique d'une chaîne de solides d'un système mécanique, met en relation le ou les paramètres d'entrée E (en position, vitesse, accélération) à ceux de la pièce de sortie S (en position, vitesse, accélération).

Cette étude porte sur la partie « TRANSMETTRE » le mouvement de la chaîne d'énergie d'un système.

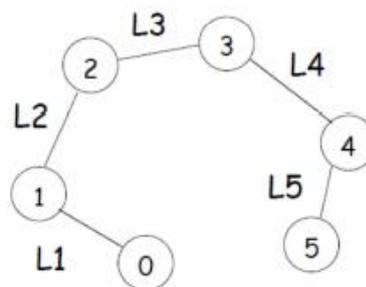
Ces relations peuvent être obtenues de manières différentes selon :

- le type de mécanisme et sa configuration (ouvert ou fermé),
- l'objectif fixé :
 - déterminer la loi de sortie pour une entrée fixée (calcul direct),
 - déterminer l'entrée pour obtenir une sortie imposée par le cahier des charges (calcul indirect).



2 CHAÎNE CINEMATIQUE OUVERTE

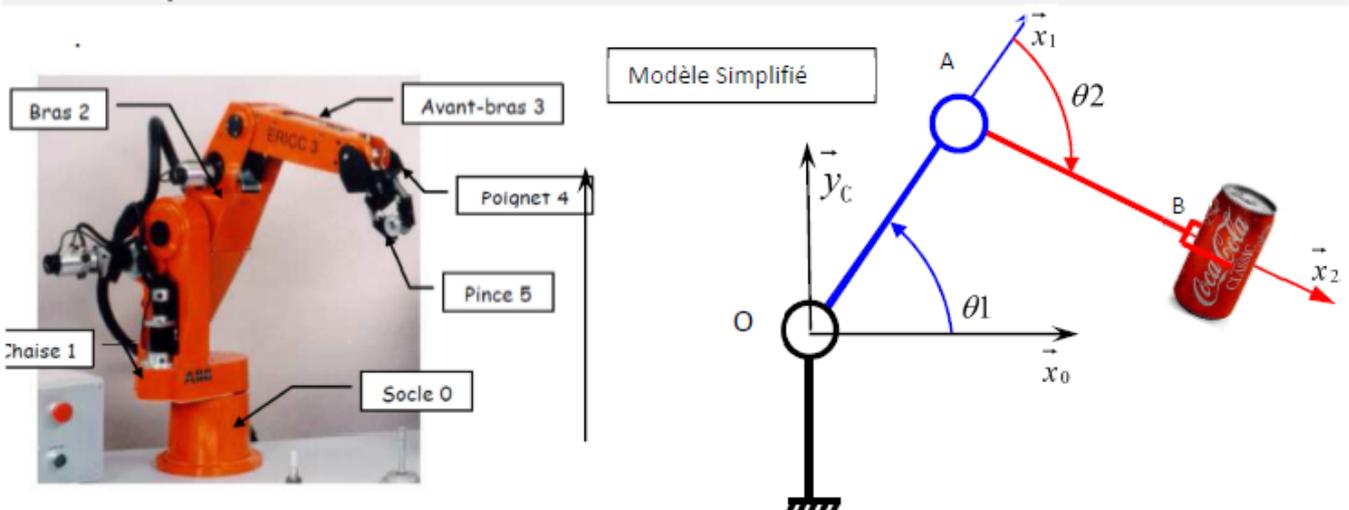
Graphe de structure :



Ici, les liaisons L_i sont toutes des liaisons pivots

Dans le cas des chaînes cinématiques ouvertes, la loi E/S concerne la relation entre les coordonnées articulaires et les coordonnées opérationnelles du point en bout de chaîne. A cet effet on établit un modèle géométrique indirect à partir d'une relation de Chasles

2.1 Exemple bras de robot



On considère le modèle plan simplifié dans lequel la pince de robot n'est animé que par deux mouvements de rotation paramétré θ_1 et θ_2 . Chaque bras du robot est de longueur L.

Le point B en bout de chaîne a comme coordonnées x_B et y_B dans le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.



Comportement des systèmes mécaniques: lois E/S

2.1.1 Relation directe

Le modèle géométrique direct permet d'exprimer les coordonnées x_B et y_B en fonction des paramètres θ_1 et θ_2 .

En écrivant la relation de Chasles $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ après projection dans le repère R_0 on arrive à déterminer le modèle géométrique direct :

$$\begin{cases} x_B = L \cdot \cos \theta_1 + L \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_B = L \cdot \sin \theta_1 + L \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

Chasles : $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \rightarrow \vec{OB} = L \cdot \vec{x}_1 + L \cdot \vec{x}_2 \rightarrow$ Projection dans la base dans laquelle on exprime les coordonnées x_B et y_B :

$\rightarrow \vec{OB} = L \cdot \vec{x}_1 + L \cdot \vec{x}_2$ avec $\vec{x}_1 = \cos \theta_1 \cdot \vec{x}_0 + \sin \theta_1 \cdot \vec{y}_0$ et $\vec{x}_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot \vec{y}_0$

$\rightarrow \vec{OB} = (L \cdot \cos \theta_1 + L \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2)) \cdot \vec{x}_0 + (L \cdot \sin \theta_1 + L \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)) \cdot \vec{y}_0$

2.1.2 Relation indirecte

Le modèle géométrique indirect permet d'exprimer les paramètres θ_1 et θ_2 en fonction des coordonnées x_B et y_B .

Le modèle géométrique indirect est plus délicat à trouver il faut utiliser :

- La transformation de somme trigonométrique en produit
- Utiliser $x_B^2 + y_B^2$ (Pythagore) puis y_B/x_B

On détermine ainsi le modèle géométrique indirect (ici hauteur $a = 0$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \arccos \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{x_B}{L} \right)^2 + \left(\frac{y_B}{L} \right)^2 \right) - 1 \right] \\ \theta_1 = \arctan \frac{y_B}{x_B} - \frac{\theta_2}{2} \end{array} \right.$$



Comportement des systèmes mécaniques: lois E/S

Modèle géométrique indirect

Il faut inverser le modèle géométrique direct :
$$\begin{cases} x_B = L \cos \theta_1 + L \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_B = L \sin \theta_1 + L \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = L \cos \theta_1 + L \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_B = L \sin \theta_1 + L \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B = 2.L \cos \frac{2.\theta_1 + \theta_2}{2} \cdot \cos \frac{\theta_2}{2} \\ y_B = 2.L \sin \frac{2.\theta_1 + \theta_2}{2} \cdot \cos \frac{\theta_2}{2} \end{cases}$$

(formules de Simpson : $\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ et $\sin a + \sin b = 2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$)

En faisant $x_B^2 + y_B^2$ pour faire apparaître un terme en $\cos^2 A + \sin^2 B$, on obtient :

$$x_B^2 + y_B^2 = 4.L^2 \cdot \cos^2 \frac{\theta_2}{2} \cdot \left(\cos^2 \frac{2.\theta_1 + \theta_2}{2} + \sin^2 \frac{2.\theta_1 + \theta_2}{2} \right) = 4.L^2 \cdot \cos^2 \frac{\theta_2}{2} \text{ et avec } \cos^2 \frac{\theta_2}{2} = \frac{1 + \cos \theta_2}{2}$$

$$\rightarrow x_B^2 + y_B^2 = 2.L^2 \cdot (\cos \theta_2 + 1) \rightarrow \text{ce qui permet d'obtenir : } \cos \theta_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{x_B}{L} \right)^2 + \left(\frac{y_B}{L} \right)^2 \right) - 1$$

En faisant $\frac{y_B}{x_B}$, on a : $\frac{y_B}{x_B} = \tan \frac{2.\theta_1 + \theta_2}{2} \rightarrow \text{ce qui permet d'obtenir : } \theta_1 = \arctan \frac{y_B}{x_B} - \frac{\theta_2}{2}$

3 CHAÎNE CINÉMATIQUE FERMÉE

La loi E/S dans les chaînes cinématiques fermées peut être obtenue de différentes méthodes :

- fermeture géométrique ou fermeture angulaire,
- produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante,
- l'équation obtenue par la condition de roulement sans glissement,
- la fermeture cinématique.

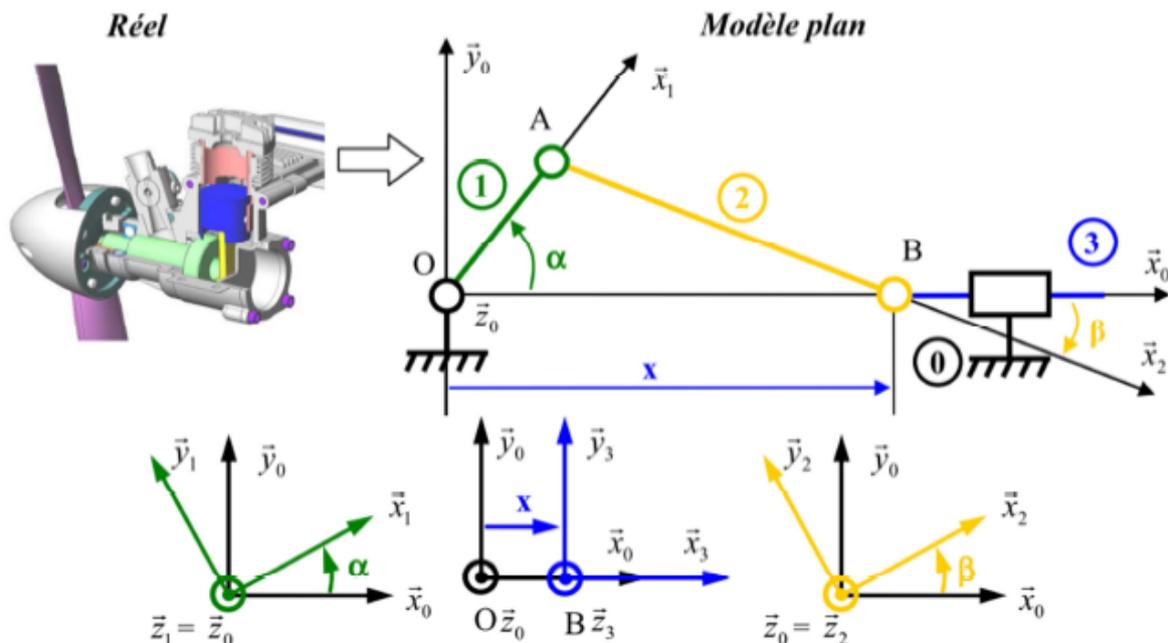
3.1 Loi entrée / sortie par fermeture géométrique

La loi entrée / sortie dans le cas de chaîne fermée s'obtient souvent par **fermeture géométrique**. Il s'agit d'écrire une **relation vectorielle (relation de Chasles)**, traduisant la **fermeture de la chaîne**, en passant par les **points caractéristiques du mécanisme**. On projette ensuite cette relation dans une base (choisi judicieusement pour limiter les calculs) afin d'obtenir des relations scalaires entre les différents paramètres, puis on élimine les paramètres intermédiaires afin d'établir notre relation entre le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du mécanisme.

Exemple - système bielle manivelle

- **Transformation** : Rotation continue en translation alternative et inversement si système réversible,
- **Utilisation** : Moteurs thermiques ou hydrauliques, compresseurs, certaines pompes, marteau perforateur...
- **Caractéristiques** : excentricité $OA=L_1$ longueur de la manivelle 1 et $AB=L_2$ longueur de la bielle 2.

Exemple micromoteur (crédit Florestan Mathurin)



Le paramètre d'entrée dépend du mode d'utilisation du système bielle manivelle :

- utilisé comme moteur, Le paramètre d'entrée est x représentant la translation du piston
- utilisé comme compresseur, le paramètre d'entrée est α représentant la rotation de la manivelle ou vilebrequin,



Comportement des systèmes mécaniques: lois E/S

Pour ce micromoteur, le paramètre d'entrée est donc $E = x$ (translation du piston), et le paramètre de sortie est $S = \alpha$ (rotation de la manivelle ou vilebrequin).

Le paramètre β est un paramètre intermédiaire traduisant la position angulaire de la bielle par rapport au bâti.

On écrit la fermeture géométrique $\vec{OO} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0}$ soit $L_1 \vec{x}_1 + L_2 \vec{x}_2 - x \vec{x}_0 = \vec{0}$. En projection sur \vec{x}_0 et

\vec{y}_0 on obtient deux équations scalaires :

$$\begin{cases} L_1 \cdot \cos \alpha + L_2 \cdot \cos \beta - x = 0 \\ L_1 \cdot \sin \alpha + L_2 \cdot \sin \beta = 0 \end{cases}$$

Afin d'obtenir la loi entrée/sortie on élimine le paramètre β en élevant au carré chacune des relations et en les additionnant.

Après développement on obtient la relation : $x = L_1 \cdot \cos \alpha + \sqrt{L_2^2 - (L_1 \sin \alpha)^2}$ valable seulement pour $L_1 < L_2$.

$$\begin{aligned} \rightarrow & \begin{cases} \cos \beta = \frac{x - L_1 \cdot \cos \alpha}{L_2} = 0 \\ \sin \beta = -\frac{L_1 \cdot \sin \alpha}{L_2} \end{cases} \quad \text{et } \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1 \\ \rightarrow & \left(\frac{x - L_1 \cdot \cos \alpha}{L_2} \right)^2 + \left(-\frac{L_1 \cdot \sin \alpha}{L_2} \right)^2 = 1 \rightarrow (x - L_1 \cdot \cos \alpha)^2 = L_2^2 - (L_1 \cdot \sin \alpha)^2 \\ \text{Soit la loi d'entrée sortie : } & \boxed{x = L_1 \cdot \cos \alpha + \sqrt{L_2^2 - (L_1 \cdot \sin \alpha)^2}} \end{aligned}$$

3.2 Loi E / S par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante

Dans le cas de chaînes fermées on peut parfois prendre en compte la particularité angulaire du système (conservation d'une valeur angulaire lors du mouvement par exemple).

Exemple de la barrière Sinusmatic

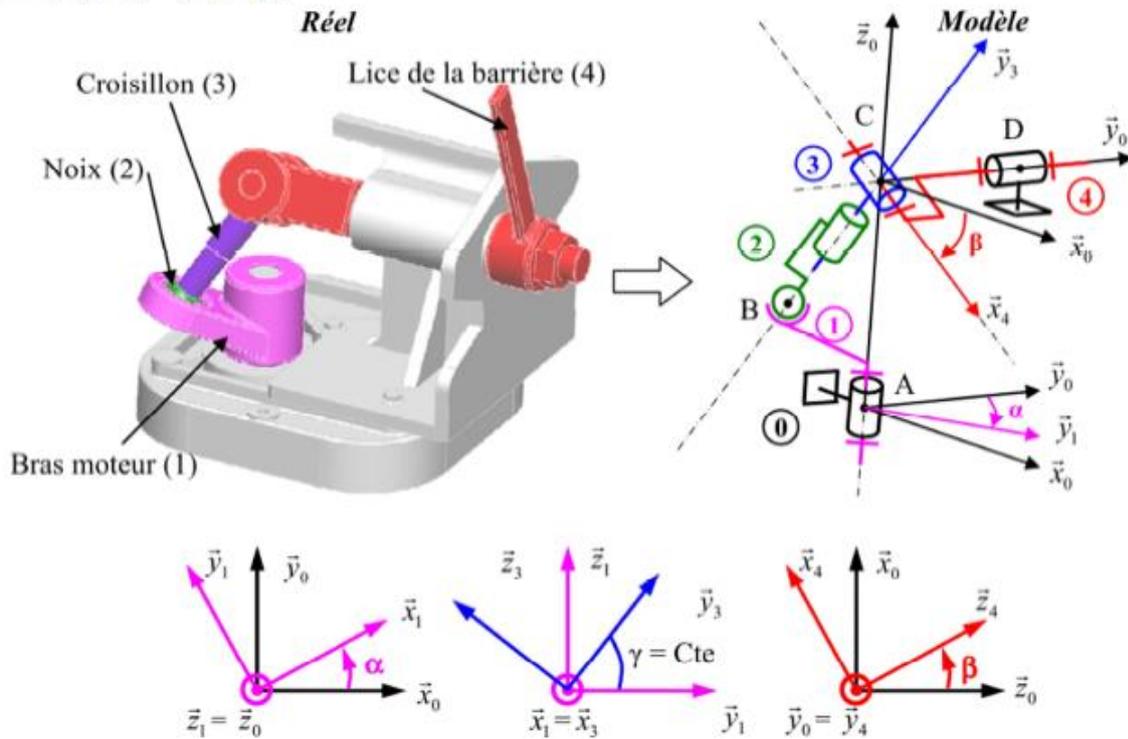
La barrière Sinusmatic permet de transformer le mouvement d'entrée du moteur (rotation continue) en un mouvement de rotation alternative sur la lice (**crédit Florestan Mathurin**).

Elle est constituée :

- D'un bras moteur 1 en liaison pivot avec le bâti 0 suivant l'axe (A, \vec{z}_0) ,
- D'une noix en liaison rotule en B avec le bras moteur 1.
- D'un croisillon en liaison pivot glissant suivant de l'axe (B, \vec{y}_3) ,
- D'un arbre de lice 4 en liaison pivot suivant de l'axe (C, \vec{x}_4) avec le croisillon 3 et en
- liaison pivot suivant de l'axe (D, \vec{y}_0) avec le bâti 0.

Comportement des systèmes mécaniques: lois E/S

Le paramètre d'entrée est le paramètre α tel que $\vec{\alpha} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et le paramètre de sortie est le paramètre β tel que $\vec{\beta} = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_0, \vec{z}_4)$.



La particularité angulaire de ce système est que le vecteur \overline{BC} est toujours orthogonal avec l'axe \vec{x}_4 .
Par conséquent le produit scalaire des 2 vecteurs d'orientation $\vec{y}_3 \cdot \vec{x}_4$ est nul : $\vec{y}_3 \cdot \vec{x}_4 = 0$

$$\vec{y}_3 \cdot \vec{x}_4 = 0 \text{ avec } \vec{y}_3 = \cos \gamma \cdot \vec{y}_1 + \sin \gamma \cdot \vec{z}_1 \text{ et } \vec{x}_4 = -\sin \beta \cdot \vec{z}_0 + \cos \beta \cdot \vec{x}_0$$

$$\text{Soit : } (\cos \gamma \cdot \vec{y}_1 + \sin \gamma \cdot \vec{z}_1) \cdot (-\sin \beta \cdot \vec{z}_0 + \cos \beta \cdot \vec{x}_0) = 0$$

$$-\cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_0 + \cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{y}_1 - \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_1 + \sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{z}_1 = 0$$

$$-\cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \beta = 0 \rightarrow -\cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha = \sin \gamma \cdot \sin \beta$$

$$-\sin \alpha = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \quad \text{Soit la loi d'entrée sortie : } \boxed{-\sin \alpha = \tan \gamma \cdot \tan \beta}$$

→ Pour $\gamma = \pi/4$ l'amplitude de la lice est de $\pi/2$



3.3 Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture cinématique

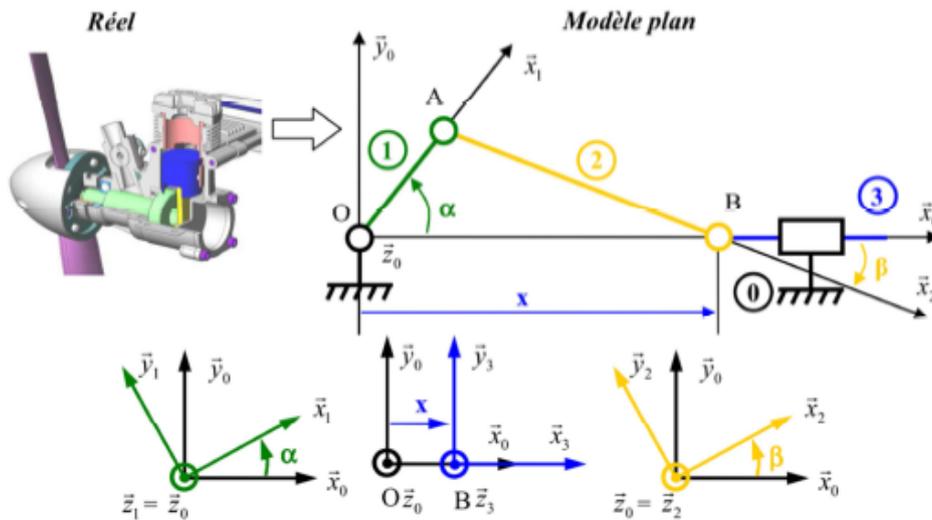
On peut déterminer une loi entrée / sortie en fonction des dérivées des paramètres et des paramètres eux-mêmes. Cette relation s'obtient en écrivant une fermeture cinématique à l'aide de torseurs par composition des mouvements.

On obtient alors deux équations vectorielles :

- composition des vecteurs rotations
- composition des vecteurs vitesse linéaire (instantanés).

Exemple du micromoteur

(crédit Florestan Mathurin)



Traduction de la fermeture cinématique de la chaîne : $\{V_{0/3}\} + \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\} = \{0\}$

Tous les torseurs sont réduits au point A, et $OA=L_1$ longueur de la manivelle 1, $AB=L_2$ longueur de la bielle 2.

$$D'où : \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} \\ V_{A \in 0/3} \end{cases} + \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \\ V_{A \in 3/2} \end{cases} + \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ V_{A \in 2/1} \end{cases} + \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ V_{A \in 1/0} \end{cases} = \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} \\ V_{A \in 0/3} + V_{A \in 3/2} + V_{A \in 2/1} + V_{A \in 1/0} = \vec{0} \end{cases}$$

Avec :

- $V_{A \in 0/3} = -V_{B \in 0/3} = -\dot{x} \cdot \vec{x}_0$
- $V_{A \in 1/0} = L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1$
- $V_{A \in 2/1} = \vec{0}$
- $V_{A \in 3/2} = V_{B \in 3/2} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = L_2 \cdot \vec{x}_2 \wedge \dot{\beta} \cdot \vec{z}_0 = L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2$

Alors $-\dot{x} \cdot \vec{x}_0 + L \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + e \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 = \vec{0}$ d'où 2 équations scalaires $\begin{cases} -\dot{x} - L \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta - e \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha = 0 \\ L \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta + e \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha = 0 \end{cases}$

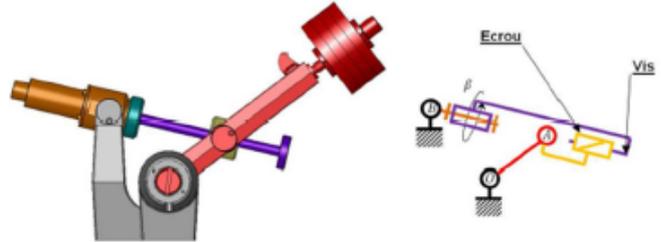
On constate qu'il s'agit des deux équations scalaires obtenues par dérivation des équations de la fermeture géométrique. Les équations obtenues par fermeture cinématique correspondent aux dérivées des équations obtenues par fermeture géométrique. Les deux approches amènent au même résultat mais la dérivation de la fermeture géométrique est généralement plus simple, on privilégiera cette méthode pour obtenir les équations en fonction des paramètres de vitesse.

4 LES MECANISMES DE TRANSFORMATION DE MOUVEMENT CLASSIQUES

4.1 Système vis – écrou

Exemple : MaxPID

- **Transformation :** Rotation continue en translation continue.
- **Réversibilité :** Dépend des frottements dans la liaison.
- **Utilisation :** Vérins électriques, chariots de machine-outil, pilote automatique, élévateur...
- **Caractéristiques :** p pas de la vis en mm

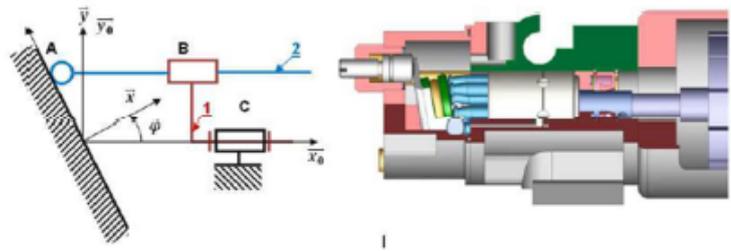


- **Loi d'entrée-sortie:** $\dot{x} = \frac{P}{2\pi} \cdot \dot{\beta}$ avec \dot{x} vitesse de translation de l'écrou et $\dot{\beta}$ vitesse de rotation de la vis

4.2 Système à came

Exemple : Pompe hydraulique à pistons axiaux

- **Transformation :** Rotation continue en translation alternative.
- **Réversibilité :** Oui (moteur : translation vers rotation et pompe rotation vers translation).
- **Utilisation :** Pompes et moteurs hydrauliques
- **Caractéristiques :** inclinaison du plan (fixe)
 $\Phi = (\vec{x}_0, \vec{x})$, $R = BC \cdot y$ rayon des pistons

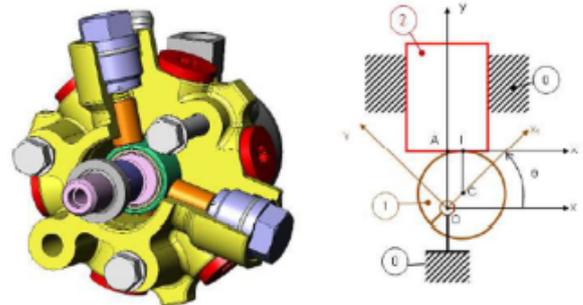


- **Loi d'entrée-sortie :** $\dot{\lambda} = \alpha \cdot R \cdot \tan \Phi \cdot \sin \alpha$ avec $\dot{\lambda}$ vitesse du piston et α angle de rotation du barillet 1.

4.3 Excentrique

Exemple : Pompe à pistons radiaux de Xantia

- **Transformation :** Rotation continue en translation alternative.
- **Réversibilité :** Dépend des frottements dans la liaison.
- **Utilisation :** Pompes hydrauliques, taille haie.
- **Caractéristiques :** excentricité e
- **Loi d'entrée-sortie:** $\lambda = R + e \cdot \sin \theta$ avec λ position du piston (OA), θ angle de rotation de l'excentrique.



4.4 Système croix de malte

Exemple : Distributeur de dose de café, Capsuleuse de Bocaux

- **Transformation :** Rotation continue en rotation intermittente.
- **Réversibilité :** jamais
- **Utilisation :** Plateau tournant de machine de transfert, indexage...
- **Caractéristiques :** Angle entre les différentes rainures, et rayon de position de l'ergot $R = O_1A$.

- **Loi d'entrée-sortie:**

$$\tan \beta = \frac{L - R \cdot \cos \theta}{R \cdot \sin \theta}$$
 quand $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
 avec L distance des deux centres de rotation (O_1O_2).

