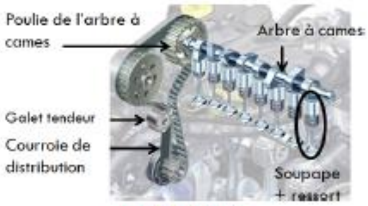
Cycle 5: Modélisation, prévision et vérification du comportement cinématique des systèmes mécaniques

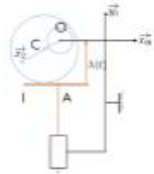
Chapitre 4 : Cinématique du point immatériel dans un solide en mouvement *(Roulement sans glissement)*

Savoir

Savoirs :
- Mod– C12 – S2 : Identifier, dans le cas du contact ponctuel, le vecteur vitesse de glissement ainsi que les vecteurs rotation de roulement et de pivotement.



Modèle CAO d'un arbre à came



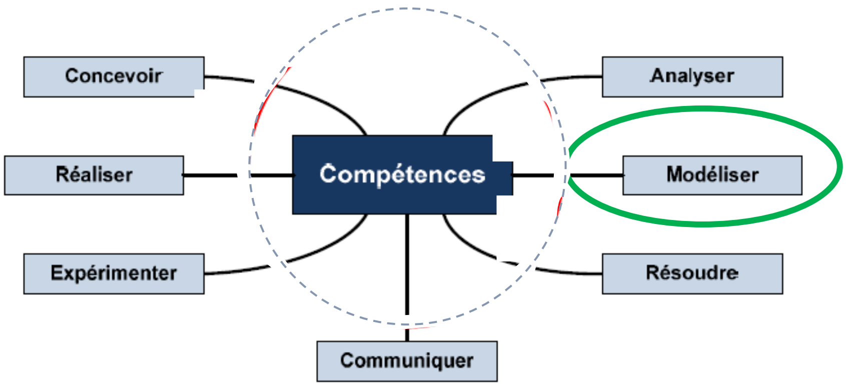
Modélisation par schéma cinématique

Dans de nombreux mécanismes, la liaison entre deux solides est modélisée par un contact ponctuel. Cependant, l'écriture du torseur cinématique correspondant au mouvement entre les deux solides n'est pas toujours évidente.

Intéressons nous par exemple au cas d'un système de distribution présent sur les véhicules équipés de moteurs thermiques. Ce système permet l'admission du mélange air+carburant dans la chambre de combustion et l'échappement des gaz brulés par l'intermédiaire de **soupapes**. Ces soupapes ont un mouvement de translation. L'ouverture et la fermeture des soupapes est réglée par l'intermédiaire de **cames** et d'un **arbre à cames**. La rotation de l'arbre à came est effectuée grâce à un entraînement par une courroie directement reliée au **vilebrequin** du moteur.

Problématique

Problématique :
- Comment calculer le vecteur vitesse et le vecteur instantané de rotation dans une liaison de type sphère – plan ?

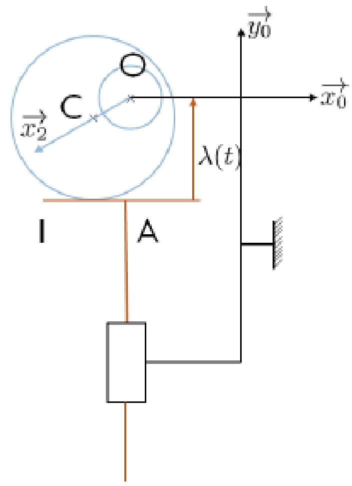


Sommaire

1 Présentation – Système de distribution

Intéressons nous à la modélisation d'une soupape, notée S_1 en liaison glissière d'axe $(A, \overrightarrow{y_0})$ avec le moteur S_0. La came S_2 est en liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ avec S_0. S_1 et S_2 sont en liaison sphère – plan de normale $(I, \overrightarrow{y_0})$.

L'objectif de ce cours est de calculer $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}$ et $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$.



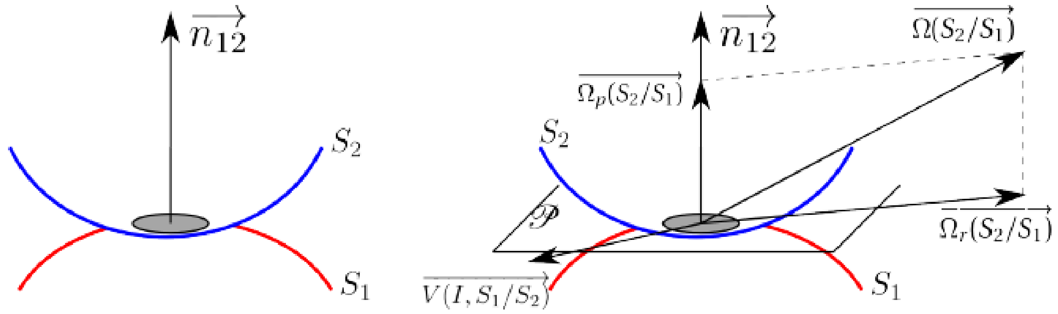
2 Modélisation des vitesses de glissement

2.1 Hypothèses

Considérons deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel.

Définissons alors I le point de contact entre les deux solides et $\overrightarrow{n_{12}}$ la normale de contact. On appelle $\mathscr{P}$ le plan normal à $\overrightarrow{n_{12}}$ en I. Il est tangent à S_1 et S_2.

On note $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}$ le vecteur instantané de rotation entre S_2 et S_1 et $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$ le vecteur vitesse de glissement entre les deux solides.



2.2 Vitesses de rotation

On a vu que dans le cas d'un contact ponctuel il existait 3 degrés de libertés de rotation paramétrables par les angles d'Euler. Nous ne cherchons pas ici à calculer directement le vecteur $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}$ en fonction de ces angles.

Cependant, ce vecteur est décomposable en une somme de deux vecteurs.

Le vecteur de pivotement

Ce vecteur est normal au plan $\mathscr{P}$. On le note $\overrightarrow{\Omega_p(S_2/S_1)}$. On a donc :

$$\overrightarrow{\Omega_p(S_2/S_1)} = \|\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} \cdot \overrightarrow{n_{12}}\| \cdot \overrightarrow{n_{12}}$$

Le vecteur de roulement

Ce vecteur est contenu dans le plan $\mathscr{P}$. On le note $\overrightarrow{\Omega_r(S_2/S_1)}$.

Résultat

Vitesse de rotation

La vitesse de rotation se compose donc ainsi :

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \overrightarrow{\Omega_p(S_2/S_1)} + \overrightarrow{\Omega_r(S_2/S_1)}$$

2.3 Vitesse de glissement

2.3.1 Position du point de contact entre solides

Cinématiquement, le point I n'est pas unique. En effet, on peut distinguer l'existence de 3 points différents :
- le point I matériel appartenant au solide S_1 ;
- le point I matériel appartenant au solide S_2 ;
- le point I (non matériel) correspondant au point de contact entre les deux solides.

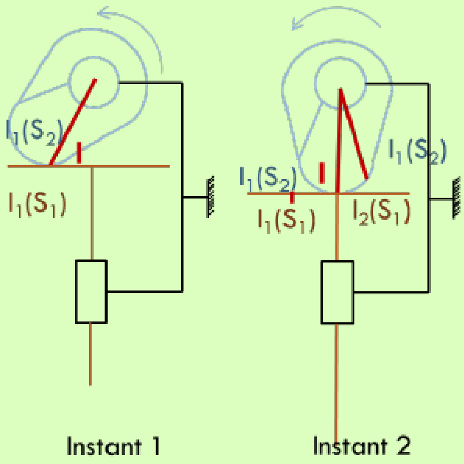
À l'instant t, ces points peuvent être confondus. À $t + dt$ ils peuvent être distincts.

En conséquence :

Résultat

$$\overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} \neq \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)}$$

Exemple



2.3.2 Définition de la vitesse de glissement

On appelle vecteur vitesse de glissement en I de S_2/S_1 le vecteur $\overrightarrow{V(I,S_2/S_1)}$.

Remarque

On considère qu'il y a toujours contact entre S_1 et S_2 et que les solides sont indéformables. En conséquence :

$$\overrightarrow{V(I,S_2/S_1)} \in \mathscr{P}$$

2.3.3 Condition de roulement sans glissement

Définition

Condition de roulement sans glissement

Dans de très nombreux mécanismes (dans les engrenages, lors du contact entre la roue et le sol *etc*) on peut faire l'hypothèse que le glissement est nul. On a alors :

$$\overrightarrow{V(I,S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$$

Il est alors possible d'identifier des lois de comportement.

2.4 Méthode de calcul de la vitesse de glissement

Le calcul de la vitesse de glissement peut se calculer à l'aide de la procédure suivante.

Méthode

1. Paramétrer le système

Méthode

2. Décomposer le mouvement : $\overrightarrow{V(I,S_1/S_2)} = \overrightarrow{V(I,S_1/S_0)} + \overrightarrow{V(I,S_0/S_2)}$
3. Calculer $\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\}$ au point I
4. Calculer $\{\mathscr{V}(S_2/S_0)\}$ au point I
5. Calculer $\overrightarrow{V(I,S_1/S_2)}$

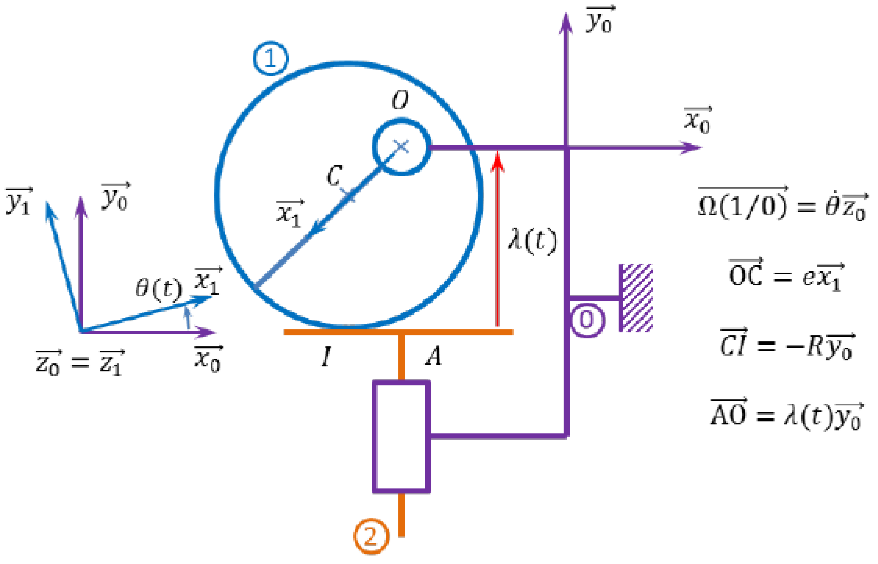
Attention

I n'est pas un point matériel. Il n'appartient ni à S_1 ni à S_2. On ne peut donc pas calculer $\left[\dfrac{\overrightarrow{OI}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$.

3 Application – Calcul de la vitesse de glissement entre la came et la soupape

Pour le système de distribution composé d'une came, d'une soupape et du moteur, on se propose de calculer la vitesse de glissement entre la soupape et la came.

Paramétrage



Détermination de la loi Entrée – Sortie

La fermeture géométrique de la chaîne est :

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow e\overrightarrow{x_1} - R\overrightarrow{y_0} + \mu(t)\overrightarrow{x_0} + \lambda(t)\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0}$$

L'équation en projection sur $\overrightarrow{y_0}$ est la suivante :

$$e\overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{y_0} - R + \lambda(t) = 0 \Longleftrightarrow e\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - R + \lambda(t) = 0 \Longleftrightarrow e\sin\theta - R + \lambda(t) = 0$$

La loi en vitesse est donc donnée par :

$$e\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\lambda}(t) = 0$$

Décomposition en mouvements simples

D'après la composition des mouvements, on a :

$$\overrightarrow{V(I,S_1/S_2)} = \overrightarrow{V(I,S_1/S_0)} + \overrightarrow{V(I,S_0/S_2)} = \overrightarrow{V(I,S_1/S_0)} - \overrightarrow{V(I,S_2/S_0)}$$

Calcul de $\overrightarrow{V(I,S_2/S_0)}$

Nature du mouvement entre S_2 et S_0 : liaison glissière d'axe $(A,\overrightarrow{y_0})$. On a donc :

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{V(A,S_2/S_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} = -\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{y_0}$$

Calculons alors $\overrightarrow{V(I,S_2/S_0)}$:

$$\overrightarrow{V(I,S_2/S_0)} = \overrightarrow{V(A,S_2/S_0)} + \underbrace{\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}}_{\overrightarrow{0}}$$

Calcul de $\overrightarrow{V(I,S_1/S_0)}$

Nature du mouvement entre S_1 et S_0 : liaison pivot d'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$. On a donc :

$$\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{z_0}$$
$$\overrightarrow{V(A,S_1/S_0)} = \overrightarrow{0}$$

Calculons alors $\overrightarrow{V(I,S_1/S_0)}$:

$$\overrightarrow{V(I,S_1/S_0)} = \underbrace{\overrightarrow{V(O,S_1/S_0)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{IO}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \left(R\overrightarrow{y_0} - e\overrightarrow{x_1}\right)\wedge\dot{\theta}\,\overrightarrow{z_0} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{x_0} + e\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_1}$$

Calcul de $\overrightarrow{V(I,S_1/S_2)}$

Au final, on a :

$$\overrightarrow{V(I,S_1/S_2)} = \overrightarrow{V(I,S_1/S_0)} - \overrightarrow{V(I,S_2/S_0)} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{x_0} + e\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_1} + \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{y_0}$$

En projetant $\overrightarrow{y_1}$ dans $\mathscr{R}_0$:

$$\overrightarrow{V(I,S_1/S_2)} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{x_0} + e\dot{\theta}\left(\cos\theta\,\overrightarrow{y_0} - \sin\theta\,\overrightarrow{x_0}\right) + \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{y_0} = \left(R\dot{\theta} - e\dot{\theta}\sin\theta\right)\overrightarrow{x_0} + \left(e\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\lambda}(t)\right)\overrightarrow{y_0}$$

Or, d'après la loi entrée-sortie, $e\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\lambda}(t) = 0$. (On pourrait aussi remarquer que la vitesse de glissement est contenue dans le plan tangent au contact).

On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{V(I,S_1/S_2)} = \dot{\theta}\,(R - e\sin\theta)\,\overrightarrow{x_0}}$$

Comportement des systèmes mécaniques: cinématique du point immatériel (roulement sans glissement)

Application 1 :

On reprend le mécanisme plan d'entraînement d'une pompe à main.
Soit un repère R(O_1, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) lié à un bâti (S_0).
Le levier (S_1) a une liaison pivot d'axe (O_1, $\vec{z}$) avec (S_0).
Soit un repère R_1(O_1, $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1$, $\vec{z}$) lié à (S_1).
L'axe (O_1, $\vec{y}_1$) est dirigé suivant l'axe du levier.
On pose ($\vec{x}$, $\vec{x}_1$)$=\theta$ et $\overrightarrow{O_1A} = a\,\vec{y}_1$.
La tige (S_2) a une liaison glissière d'axe (A, $\vec{x}$) avec (S_0) et le centre A d'un maneton lié à (S_2), situé sur (A, $\vec{x}$), décrit l'axe (O_1, $\vec{y}_1$) lié à (S_1). On pose $\overrightarrow{OA} = \lambda\,\vec{x}$.

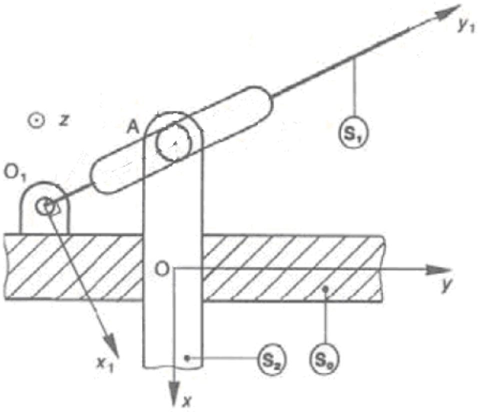


Figure : Pompe à bras

Question : déterminer le vecteur vitesse de glissement entre 1 et 2 pour évaluer les pertes par frottement dans la liaison.

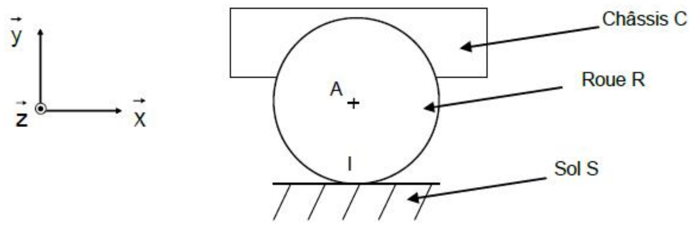
Solution : (cf feuille annexe)

Application 2: *roue de voiture*

Soit un véhicule quelconque vérifiant 2 hypothèses FONDAMENTALES :

- **Le véhicule est en mouvement de translation par rapport au sol.**
- **On suppose qu'il y ait roulement sans glissement au contact roue/sol.**

Schéma simplifié.



Le rayon de la roue est : r
La vitesse de translation du châssis/sol est : $\forall P$ on a $\overrightarrow{V_{P\in C/S}} = v_{C/S}.\vec{x}$
La vitesse de rotation de la roue/châssis est : $\overrightarrow{\Omega_{R/C}} = \omega_{R/C}.\vec{z}$

NB : $\omega_{R/C} < 0$ si $v_{C/S} > 0$

Question 1 : *Déterminer la relation entre $v_{C/S}$ et $\omega_{R/C}$ répondant aux hypothèses.*

$$v_{C/S}.\vec{x} \underbrace{=}_{\text{Mouvement de translation}} \overrightarrow{V_{I\in C/S}} = \overrightarrow{V_{I\in C/R}} + \underbrace{\cancel{\overrightarrow{V_{I\in R/S}}}}_{\text{Roulement sans glissement}} = \overrightarrow{V_{I\in C/R}} = \cancel{\overrightarrow{V_{A\in C/R}}} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{C/R}} = r.\vec{y} \wedge (-\omega_{R/C}.\vec{z}) = -r.\omega_{R/C}.\vec{x}$$

$$\boxed{|v_{C/S}| = r.|\omega_{R/C}|}$$