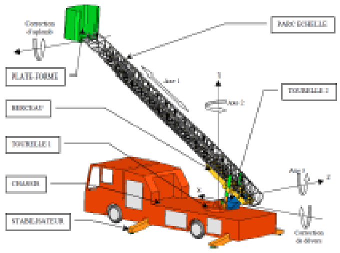
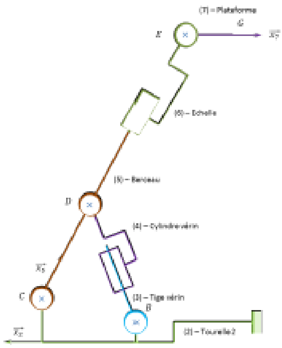
Cycle 5: Modélisation, prévision et vérification du comportement cinématique des systèmes mécaniques

Chapitre 5 : Etude graphique des mouvements plans

Système EPAS



Schématisation 3D



Modélisation plane

On s'intéresse au déploiement de l'Échelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle. Lors de cette phase, les tourelles sont bloquées. Le mouvement de l'échelle est réalisé grâce à la sortie de la tige du vérin.

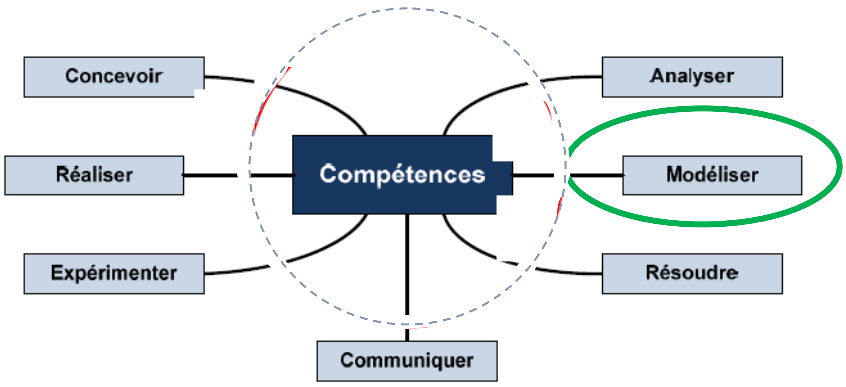
Ce mouvement à la particularité d'être "plan". En effet, les liaisons qui constituent le mécanisme ne génèrent que des mouvements dans le plan $(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y})$. Dans ce cas, il est possible d'utiliser des outils graphiques pour déterminer les vitesses de déplacement des solides.

Problématique

Problématique :
– Comment déterminer graphiquement les vitesses des solides dans les systèmes mécaniques ?

Savoir

Savoirs :
Résoudre :
– Rés-C1-S2 : Déterminer graphiquement le champ des vecteurs vitesses des points d'un solide dans le cas de mouvements plan sur plan.



Sommaire

1. Avantages et inconvénients de la cinématique graphique

Avantages :
- Méthode plus visuelle et plus rapide.

Inconvénients :
- Méthode utilisée seulement pour des mouvements « plan sur plan ».
- Les résultats obtenus sont valables uniquement pour la position du système de la figure (sur laquelle ont été réalisés les tracés). Si l'on souhaite une vitesse d'un point du solide dans une autre position, il faut refaire le schéma et la construction graphique…
- Méthode moins précise.

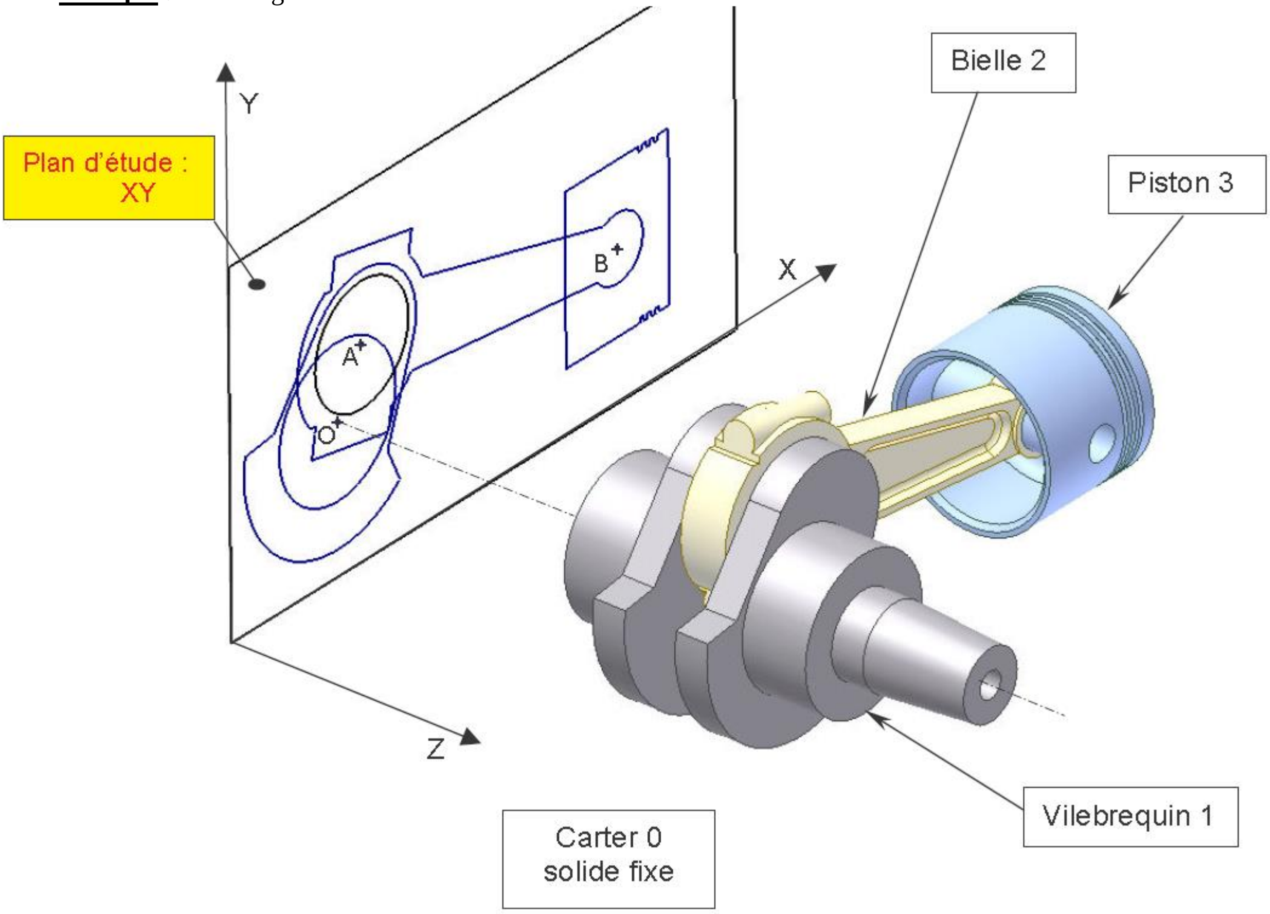
2. Mouvement plan

2.1. Notion de mécanisme plan

Un mécanisme est supposé plan, d'un point de vue cinématique, à partir du moment où on peut étudier les mouvements en projection sur un seul plan.

Les mouvements possibles sont alors :
- **translation** (rectiligne, circulaire ou quelconque) dans le plan de l'étude,
- **rotation autour d'un axe fixe**, perpendiculaire au plan de l'étude,
- autre mouvement dans ce plan : on parle alors de **MOUVEMENT PLAN** quelconque ou « complexe ».

Exemple : embiellage de moteur



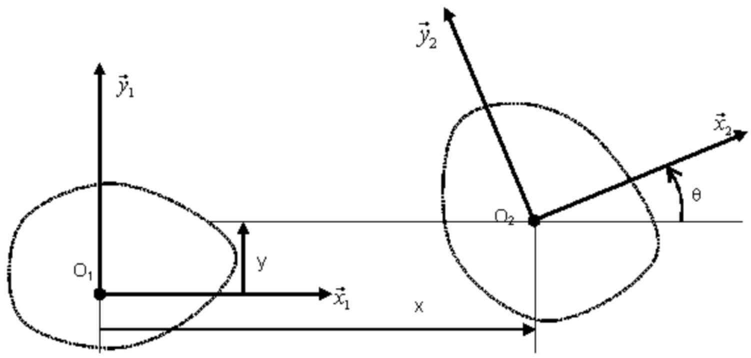
Mouvements par rapport au carter : 1/0 = rotation d'axe (O, $\vec{z}$)
3/0 = translation rectiligne de direction $\vec{x}$
2/0 = mouvement plan dans ($\vec{x}$, $\vec{y}$)

Autres mouvements relatifs : 2/1 = rotation d'axe (A, $\vec{z}$)
3/2 = rotation d'axe (B, $\vec{z}$)

2.2. Torseur cinématique d'un solide en mouvement plan

Soit un solide S_2 en mouvement plan ($\vec{x}$, $\vec{y}$) par rapport à un solide S_1 :
Le torseur cinématique (le plus général) du mouvement plan ($\vec{x}$, $\vec{y}$) de S_2 par rapport à S_1 s'écrit :

$$\left\{\upsilon_{S_2/S_1}\right\} = \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}_{S_2/S_1} \\ \overrightarrow{V_{O_2 \in S_2/S_1}} \end{matrix}\right\}_{O_2} = {}_{O_2}\left\{\begin{matrix} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})}$$



2.3. Base et Roulante

Lorsque la position du centre instantané de rotation I varie au cours du mouvement , sa trajectoire dans le plan lié à l'un des solides est appelée « **base** » tandis que la courbe qu'il parcourt dans le plan lié à l'autre solide prend le nom de « **roulante** ».
Au cours du mouvement, la « base » et la « roulante » roule sans glisser l'une sur l'autre.

Méthode pour définir la base et la roulante du mouvement de 2/1 :

1- La « base » du mouvement de 2/1 est le lieu des points I exprimés dans le repère associé à 1 (solide de référence dans le mouvement de 2/1).
2- La « roulante» du mouvement de 2/1 est le lieu des points I exprimés dans le repère associé à 2.

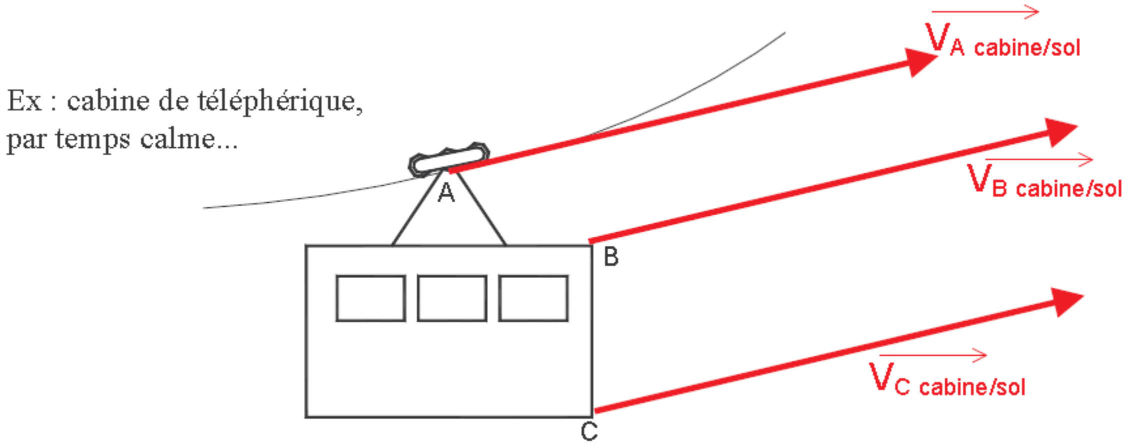
(cf animation échelle)

3. Rappel de propriétés de mouvements simples

3.1. Translation

Définition :
Un solide est en translation (par rapport à un repère de référence) si et seulement si une droite (AB) de ce solide reste toujours parallèle à elle-même (dans ce repère).

1- Les trajectoires de chaque point (dans le repère de référence) sont superposables.
2- Les vecteurs vitesses de tous les points (par rapport à un repère de référence) **sont égaux à un instant donné** : le champ des vecteurs vitesses est UNIFORME (ce qui ne signifie pas constant au cours du temps).

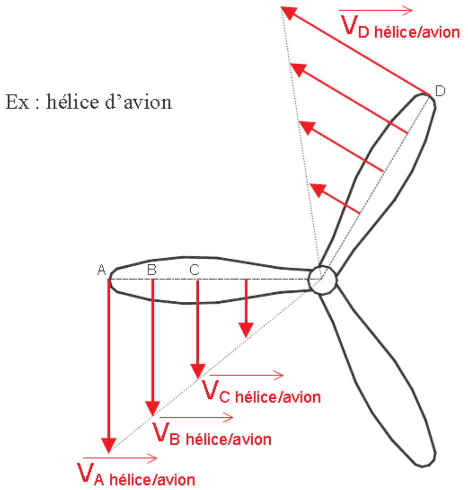


3.2. Rotation autour d'un axe fixe

Les points appartenant à l'axe de rotation (ou axe central) sont fixes par rapport au repère de référence.
Les autres points ont des trajectoires circulaires centrées sur l'axe.

Le vecteur vitesse (linéaire) d'un point (par rapport au repère de référence) est :
- **perpendiculaire au rayon de la trajectoire,**
- **orienté selon le sens de rotation**
- **sa norme vaut V =R.ω**

avec vitesse linéaire V en **m/s**, Rayon de la trajectoire R en **m**, Fréquence de rotation ω en **rad/s**



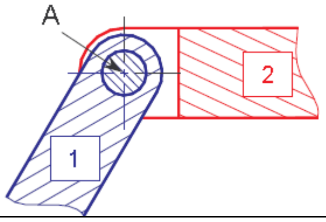
4. Composition des vecteurs vitesses

- Régle : en un point A, quels que soient les solides 0, 1 et 2 ⇒ $\overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}} = \overrightarrow{V_{(A\in 1/2)}} + \overrightarrow{V_{(A\in 2/0)}}$

- Applications pratiques courantes :

A est un point d'articulation (pivot, rotule…)

$$\overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}} = \overrightarrow{V_{(A\in 2/0)}}$$

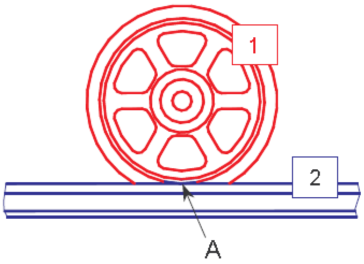


$$\overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{(A\in 1/2)}}}_{\substack{\vec{0} \\ \text{car mvt } 1/2 = \text{rotation en A}}} + \overrightarrow{V_{(A\in 2/0)}}$$

Il y a « roulement sans glissement »(RSG) en A entre 1 et 2 :

$$\overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}} = \overrightarrow{V_{(A\in 2/0)}}$$

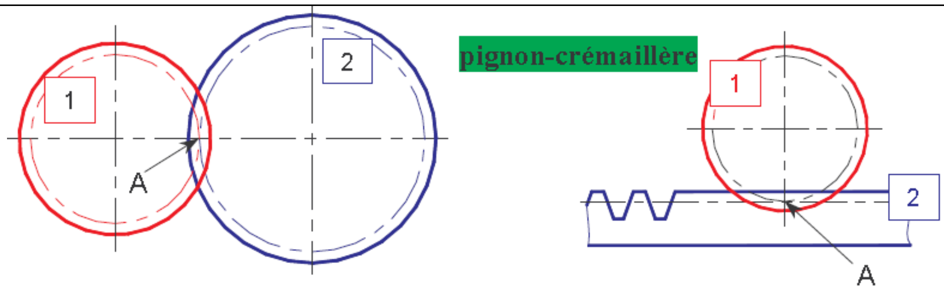
De plus, A est le CIR (Centre Instantané de Rotation) du mouvement de 1/2.



$$\overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{(A\in 1/2)}}}_{\substack{\vec{0} \\ \text{car RSG entre } 1/2}} + \overrightarrow{V_{(A\in 2/0)}}$$

Engrenage

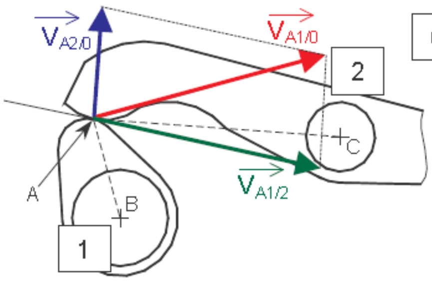
$$\overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}} = \overrightarrow{V_{(A\in 2/0)}}$$



Idem ci-dessus puisqu'il y a « roulement sans glissement » en A

Vitesse de glissement

Exemple : came et culbuteur



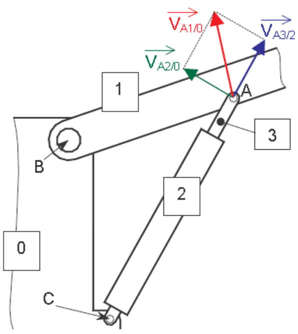
0 = carter fixe

$$\overrightarrow{V_{A1/0}} = \overrightarrow{V_{A1/2}} + \overrightarrow{V_{A2/0}}$$

$\overrightarrow{V_{A1/0}}$	$\overrightarrow{V_{A1/2}}$	$\overrightarrow{V_{A2/0}}$
⊥ rayon BA car mouvement 1/0 = rotation en B	tangente au contact car c'est la **vitesse de glissement**	⊥ rayon CA car mouv. 2/0 = rotation en C

Mouvements combinés :

Ex : vérin



$$\overrightarrow{V_{A1/0}} = \overrightarrow{V_{A3/0}} = \overrightarrow{V_{A3/2}} + \overrightarrow{V_{A2/0}}$$

$\overrightarrow{V_{A1/0}}$	$\overrightarrow{V_{A3/2}}$	$\overrightarrow{V_{A2/0}}$
⊥ rayon BA car mouvement 1/0 = rotation en B	// CA car mouv. 3/2 = transl. // CA	⊥ rayon CA car mouv. 2/0 = rotation en C

5. Cinématique graphique plane

Le solide dont on étudie le mouvement étant supposé indéformable, le mouvement d'un point dépend forcément des autres points du solide.
Le lien qui peut être mise en évidence se situe au niveau des vecteurs vitesses.
Il existe deux méthodes graphiques pour le faire apparaître :

- **l'équiprojectivité**
- **le CIR (Centre Instantané de Rotation)**, parfois associé au théorème des 3 plans glissants.

Ces 2 méthodes sont équivalentes, à ceci près que l'une des deux peut parfois s'imposer par rapport à l'autre pour des raisons pratiques dues au tracé (place disponible ou précision).

5.1. Equiprojectivité

Soient A et B deux points d'un solide (S) en mouvement par rapport à un repère R.

D'après Varignon on a :

$$\overrightarrow{V_{(B\in S/R)}} = \overrightarrow{V_{(A\in S/R)}} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

[2]

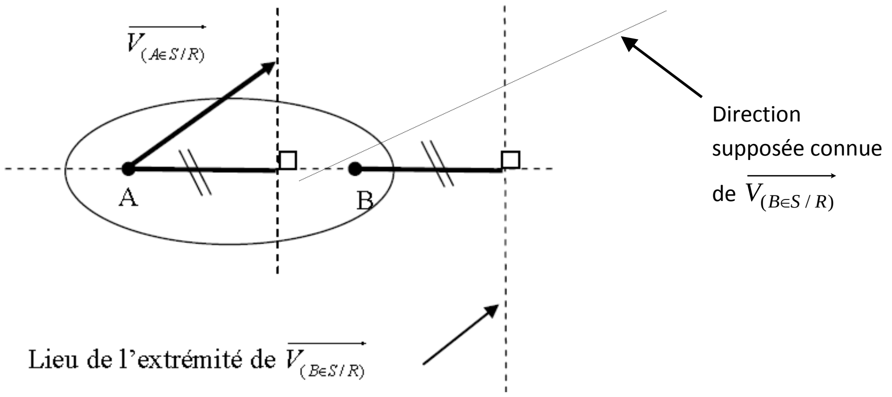
En multipliant chaque membre de l'égalité par $\overrightarrow{AB}$, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{(B\in S/R)}} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{(A\in S/R)}} \bullet \overrightarrow{AB}}$$

Cette relation traduit **l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse**s.

Interprétation graphique :

A une date t donnée, les projections orthogonales des vecteurs vitesse $\overrightarrow{V_{(A\in S/R)}}$ et $\overrightarrow{V_{(B\in S/R)}}$ sur un axe de direction AB sont égales.

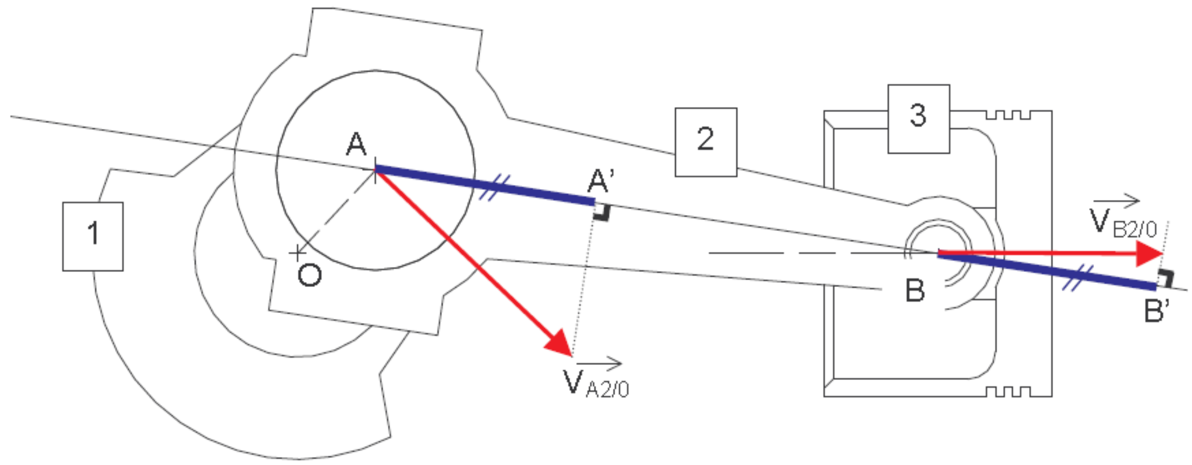


Dans le mouvement d'un solide indéformable 1 par rapport à un solide de référence 0, les vecteurs vitesses de deux points quelconques A et B, $\overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}}$ et $\overrightarrow{V_{(B\in 1/0)}}$, ont même projection sur la droite (AB).

Exemple de l'embiellage : http://www.mecamedia.info/index/flash_biellemanivellev3

On applique l'équiprojectivité entre A et B dans le mouvement 2/0 :

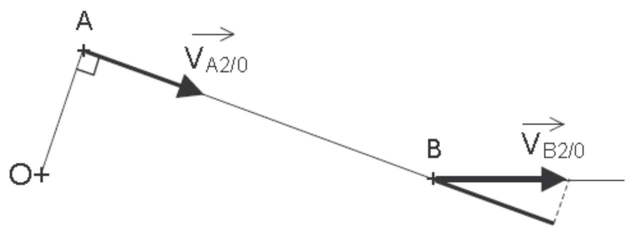
les vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}}$ et $\overrightarrow{V_{(B\in 1/0)}}$, ont même projection sur la droite (AB).



$\overrightarrow{V_{(A\in 2/0)}} = \overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}}$ car A est centre de la rotation 2/1. Ce vecteur est donc perpendiculaire au rayon OA.

$\overrightarrow{V_{(B\in 2/0)}} = \overrightarrow{V_{(B\in 3/0)}}$ car B est centre de la rotation 3/2. Ce vecteur est donc parallèle à la direction de translation du piston.

Positions particulières de l'embiellage :

 Projection des vitesses nulle sur (AB), donc $\overrightarrow{V_{(B\in 2/0)}}$ est forcément nulle, puisqu'elle ne peut pas être perpendiculaire à (AB) ici.	 $\overrightarrow{V_{(A\in 2/0)}}$ est sur (AB) : sa projection est alors maximale. C'est la position où $\overrightarrow{V_{(B\in 2/0)}}$ atteint son maximum (en supposant une vitesse de rotation du vilebrequin constante).

5.2. Centre instantané de rotation (CIR)

Méthode graphique de détermination :

Pour un mouvement considéré, le CIR se trouve à l'intersection des supports des vecteurs vitesses associés au mouvement en question.

Dans un mouvement quelconque d'un solide (i) par rapport à un solide (j), il existe à un moment donné, un point noté $I_{i/j}$ ou I_{ij} autour duquel le mouvement est une rotation instantanée.

- Ce point $I_{i/j}$ est appelé Centre Instantané de Rotation (CIR) du mouvement de i/j.
- Ce point existe, sauf si le mouvement (i/j) est une translation. En fait, on peut dire que le CIR est alors à l'infini.
- La différence avec une « vraie » rotation est que le CIR n'est pas fixe, mais se déplace à chaque instant.

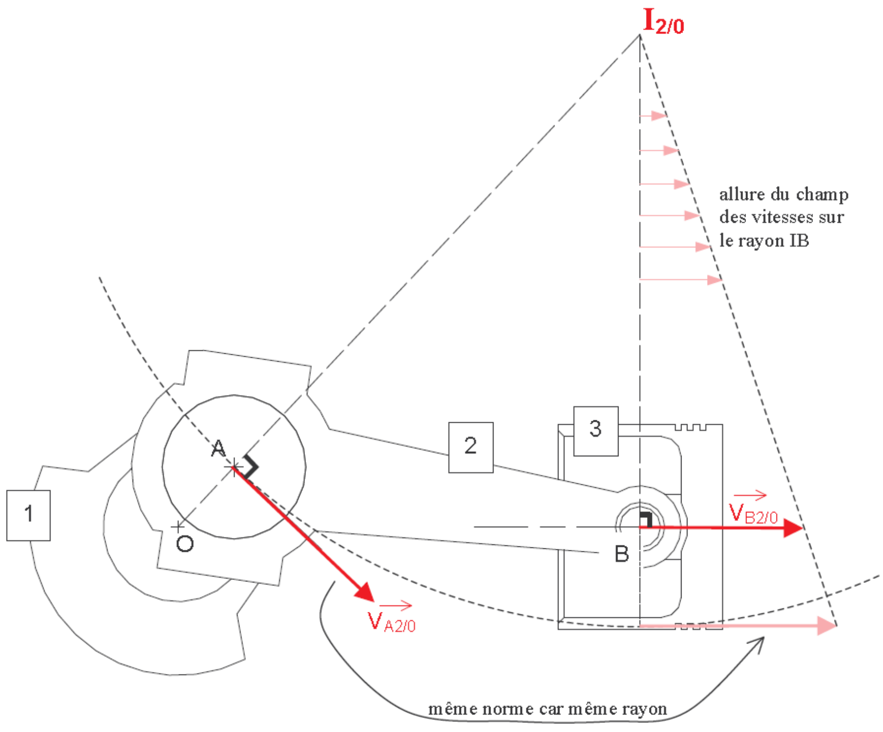
  Pour un mouvement plan entre 1 et 0, on peut écrire par définition que : $\boxed{\overrightarrow{V_{(I\in 1/0)}} = \vec{0}}$ avec I Centre Instantané de Rotation du mouvement de 1/0 à **l'instant t de l'étude.**

Exemple de l'embiellage :

$\overrightarrow{V_{(A\in 2/0)}} = \overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}}$ car A est centre de la rotation 2/1. Ce vecteur est donc perpendiculaire au rayon OA.

$\overrightarrow{V_{(B\in 2/0)}} = \overrightarrow{V_{(B\in 3/0)}}$ car B est centre de la rotation 3/2. Ce vecteur est donc parallèle à la direction de translation du piston.

Le CIR $I_{2/0}$ se trouve sur : $\begin{cases} \text{la perpendiculaire à } \vec{V}_{A\in 2/0} \\ \text{la perpendiulaire à } \vec{V}_{B\in 2/0} \end{cases}$



Dans cette position, tout se passe comme si la bielle tournait autour d'un pivot fictif en $I_{2/0}$.
Le problème est alors traité comme s'il s'agissait d'une « vraie » rotation, en traçant le champ des vecteurs vitesses sur un rayon, à partir d'une vitesse connue. (ici, en reportant par exemple une vitesse équivalente en norme à $\overrightarrow{V_{(A\in 2/0)}}$ sur le rayon IB)

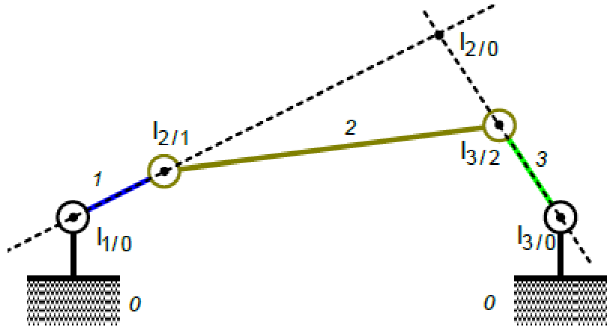
5.3. Théorème des 3 plans glissants

Soit S1, S2 et S3 trois solides en mouvement plan sur plan de normale . z
On note , et les CIR des mouvements relatifs $I_{2/1}$, $I_{3/2}$ et $I_{3/1}$

Alors, les CIR des mouvements relatifs $I_{2/1}$, $I_{3/2}$ et $I_{3/1}$ sont alignés.

Exemple :

La propriété d'alignement des CIR est utilisée pour déterminer le CIR du mouvement de 2/0.



6. Exercice d'application : *Echelle glissant sur le sol et le long d'un mur*

- Déterminer la position du CIR I_{21}
- Déterminer graphiquement $\overrightarrow{V_{(B\in 2/1)}}$
  - par la méthode du CIR
  - par équiprojectivité

Echelle dimensionnelle : **1 : 50**

- Déterminer « graphiquement » $\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}$ en rad/s, puis $N_{2/1}$ en tour/minute.