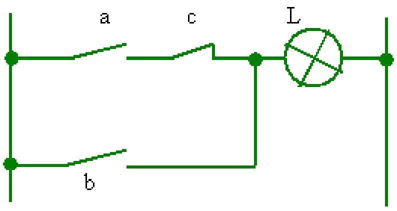
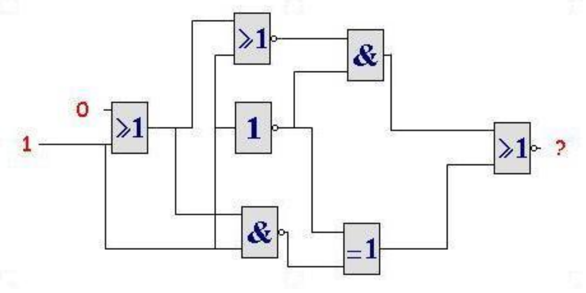
Cycle 8: Modélisation des systèmes à évènements discrets

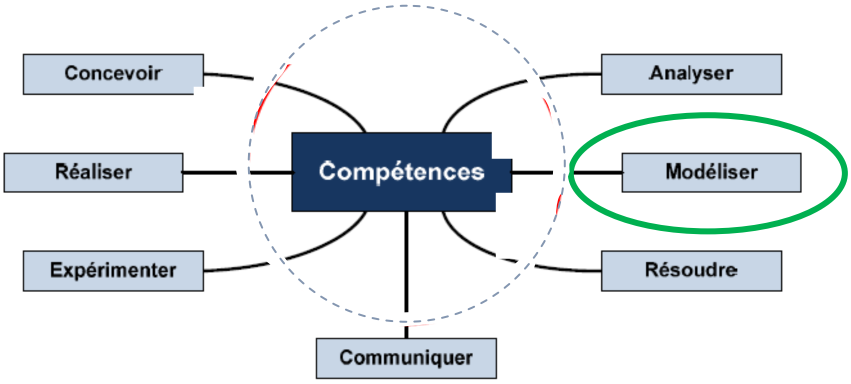
Chapitre 2 : Logique combinatoire





Compétences:

- Modéliser les systèmes à évènements discrets (tables vérité, fonctions logiques…)
- Traduire le comportement d'un système à évènements discrets



Les systèmes logiques combinatoires n'utilisent aucun mécanisme de mémorisation (ils n'ont pas de mémoire). **Les grandeurs de sortie s'expriment comme une combinaison des grandeurs d'entrée.**

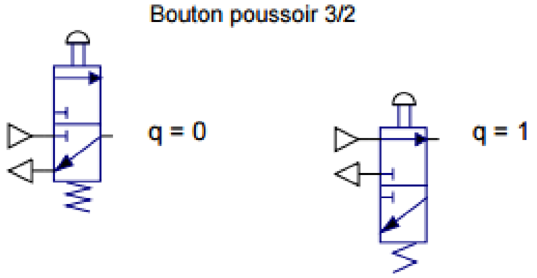
Au laboratoire, on peut trouver :	**Grandeurs d'entrée**	**Grandeurs de sortie**
Un ouvre-portail	Bouton ouverture (o) Bouton fermeture (f) Cellule photoélectrique (c)…	Mise en marche du portail (M)

1) Variables binaires (ou logiques ou booléennes).

Une variable binaire Tout Ou Rien = TOR (allumé ou non, appuyé ou non, ouvert ou fermé...) ne peut prendre que deux états, vrai ou faux, symbolisés conventionnellement par 1 ou 0.
Exemples :

Interrupteur normalement ouvert

Bouton poussoir 3/2



2) Fonctions logiques.

21) Définition.

Les sorties S_i d'un système à logique combinatoire sont le résultat d'une combinaison de plusieurs variables d'entrée e_i. Ces combinaisons sont alors formulées à l'aide de **fonctions logiques :** $S_i = f(e_1, e_2, e_3 ...)$

22) Représentation d'une fonction logique.

221) Par une phrase explicitant la fonction qu'elle réalise.

Ex : La lampe L s'allume si le bouton a est actionné et qu'en même temps le bouton b n'est pas actionné, ou alors si le bouton c est actionné.

222) Par une table de vérité.

Elle indique toutes les combinaisons possibles des états logiques des entrées ainsi que le résultat de la sortie.

a	b	c	L
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

223) Par une équation logique.

Dans celle-ci, le signe = ne traduit pas une égalité mais une identité d'état. Ex : $L = (a.\overline{b}) + c$
Les deux états possibles (0 ou 1) de la fonction logique sont toujours le résultat d'**opérations logiques.**
Ces opérations sont effectuées sur des variables logiques selon les règles de l'algèbre de BOOLE.

Les 4 opérations logiques fondamentales : OUI, NON, OU, ET.
Les 4 opérations de base entre 1 ou 2 variables binaires a et b sont :

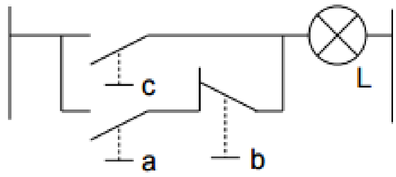
L'opération OUI	notée $S = a$	qui donne la valeur 1 à S, si et seulement si	$a = 1$
L'opération NON (appelée aussi « complément »)	notée $S = \overline{a}$		$a = 0$
L'opération OU	notée $S = a + b$		$a = 1$ OU $b = 1$
L'opération ET	notée $S = a \cdot b$		$a = 1$ ET $b = 1$

Algèbre de Boole et théorèmes de De Morgan.

propriétés de la somme logique	propriétés du produit logique	involution
$0+0=0$ $a+1=1$ $0+1=1$ $a+0=a$ $1+0=1$ $a+a=a$ $1+1=1$ $a+\bar{a}=1$	$0.0=0$ $a.1=a$ $0.1=0$ $a.0=0$ $1.0=0$ $a.a=a$ $1.1=1$ $a.\bar{a}=0$	$\bar{0}=1$ $\bar{1}=0$ $\bar{\bar{a}}=a$
commutativité	**associativité**	**distributivité**
$a.b=b.a$ $a+b=b+a$	$a.(b.c)=(a.b).c$ $a+(b+c)=(a+b)+c$	$a.(b+c)=a.b+a.c$ $a+(b.c)=(a+b).(a+c)$
Théorème de l'absorption	**Identités remarquables**	**Théorèmes de De Morgan**
$a+a.b=a$ $a.(a+b)=a$	$a+\bar{a}.b=a+b$ $(a+b).(\bar{a}+c)=a.c+\bar{a}.b$	$\overline{(a+b)}=\bar{a}.\bar{b}$ et $\overline{(a.b)}=\bar{a}+\bar{b}$ Ces théorèmes se généralisent à n variables.

L'opérateur ET est prioritaire par rapport à l'opérateur OU.

224) Par un schéma à contacts.



Dans celui-ci, chaque contact concrétise, par ses deux positions, les deux états d'une variable d'entrée.
La lampe symbolise la variable de sortie.

Règles à respecter.

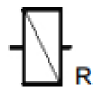
1) Dans un schéma électrique tout organe doit être représenté au repos (non actionné).

2) **Le déplacement de l'élément mobile se fait de bas en haut ou de gauche à droite.**

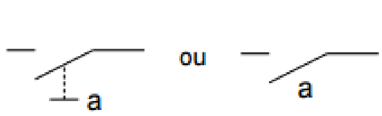
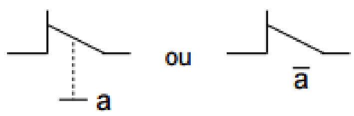
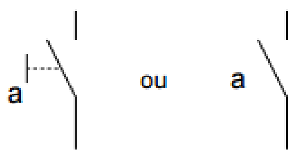
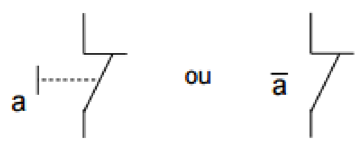
3) Une installation électrique comprend en général :
   - un générateur : Pile, accumulateur, alternateur, dynamo...
   - un récepteur : lampe, moteur, résistance chauffante, relais, électrovanne...
   - des éléments de liaison : fils conducteurs, circuits imprimés...
   - un dispositif de commande contacts...

   Dans un souci de simplification, le schéma développé ne représente que les contacts, les fils conducteurs et le ou les récepteurs (pas de générateur, pas de ressort ...).

4) Convention de représentation :
   - **Les récepteurs** sont désignés par des lettres majuscules : L, M, R...

Voyant, Lampe	Moteur	Relais
		

   - **Les contacts (interrupteurs)** :

	Contact Normalement Ouvert (ou contact à fermeture)	**Contact Normalement Fermé** (ou contact à ouverture)
	Passage du courant seulement s'il est actionné. Ex : Bouton de sonnette.	Passage du courant seulement s'il n'est pas actionné. Ex : Porte de réfrigérateur, portière de voiture.
Symbole horizontal		
Symbole vertical		

225) Par un logigramme.

Il utilise les symboles logiques NF ISO 5784.

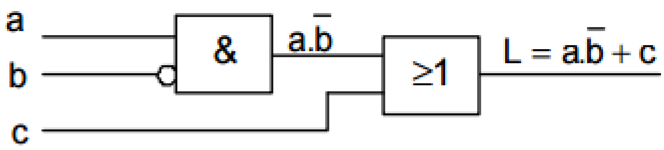
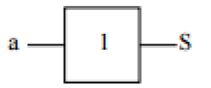
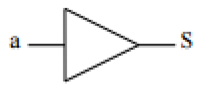
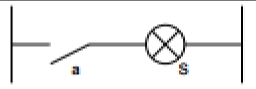
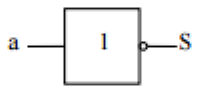
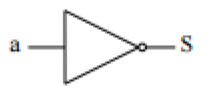
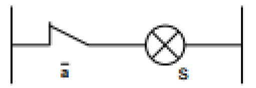
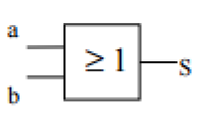
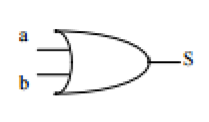
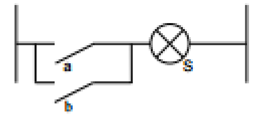
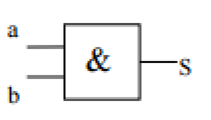
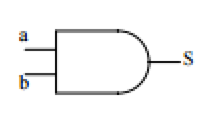
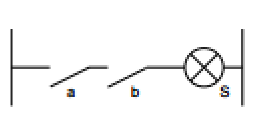
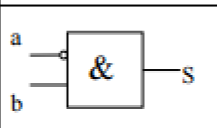
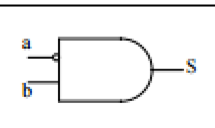
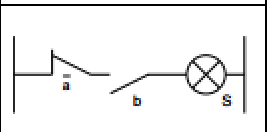
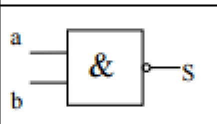
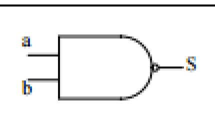
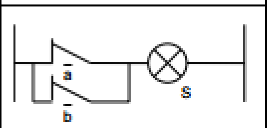
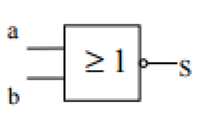
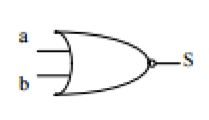
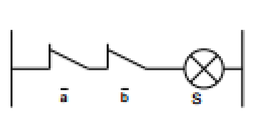
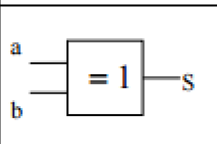
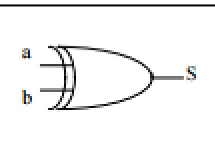
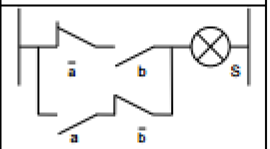
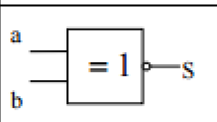
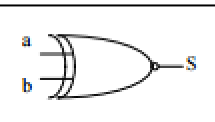
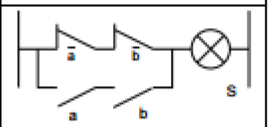


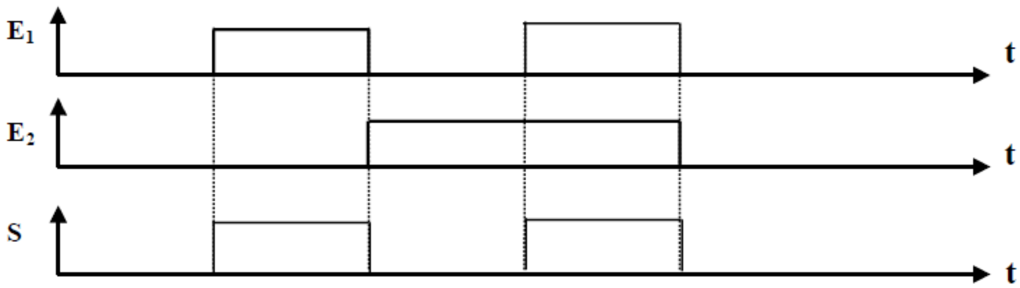
Tableau des symboles appelés opérateurs, cellules, ou portes logiques.

Fonction	équation logique	symbole AFNOR	symbole US	table de vérité	schéma à contact
OUI	$S = a$			a S 0 0 1 1	
NON	$S = \overline{a}$			a S 0 1 1 0	
OU	$S = a + b$			a b S 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1	
ET	$S = a.b$			a b S 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1	
INHIBITION	$S = \overline{a}.b$			a b S 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0	
NAND (NON ET)	$S = \overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$			a b S 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0	
NOR (NON OU)	$S = \overline{a + b} = \overline{a}.\overline{b}$			a b S 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0	
OU EXCLUSIF	$S = a \oplus b$ $= \overline{a}.b + a.\overline{b}$			a b S 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0	
ET INCLUSIF (IDENTITE)	$S = a \odot b$ $= \overline{a}.\overline{b} + a.b$			a b S 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1	

NB : $\overline{a \oplus b} = a \odot b$

226) Par un chronogramme

C'est le graphe représentant l'évolution des variables d'entrée et de sortie au cours du temps



237) Recomposition de fonction : Utilisation de cellules universelles.

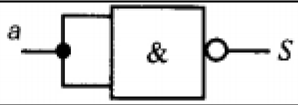
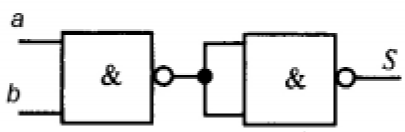
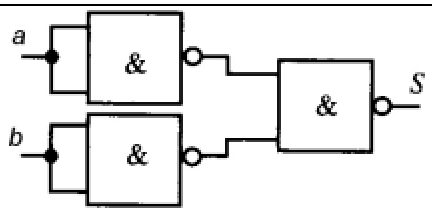
Intérêt et définition d'une cellule universelle.

Une fonction logique quelconque peut s'écrire uniquement en utilisant les 3 opérations logiques fondamentales : COMPLÉMENT, ET, OU (par définition de l'algèbre de Boole).
Ainsi si une cellule permet de réaliser ces 3 opérations, elle sera dite « universelle », puisqu'elle pourra réaliser, en s'associant avec des cellules semblables, n'importe quelle fonction.
Ceci est intéressant puisque cela permet de réduire les types de composants nécessaires et d'optimiser les circuits intégrés (circuits électroniques composés généralement d'un minimum de quatre cellules identiques).

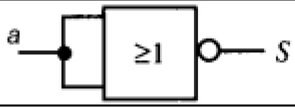
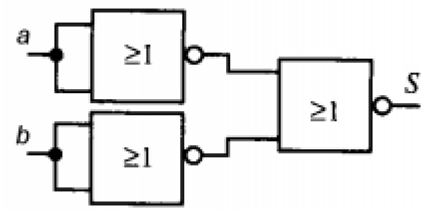
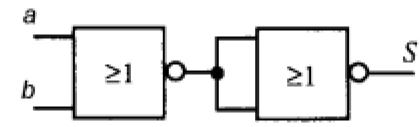
D'autre part, toute opération ET peut se remplacer (en appliquant le théorème de De Morgan) par une opération OU et une opération COMPLÉMENT.
Donc si une cellule permet de réaliser l'opération OU et l'opération COMPLÉMENT, cette cellule peut réaliser aussi l'opération ET. Elle est donc « universelle » puisqu'elle peut réaliser les 3 opérations fondamentales : ET, OU, COMPLÉMENT.

Les cellules NAND, NOR et ET INCLUSIF sont donc « universelles ».

Utilisation de cellules NAND.

Opérations à réaliser	Détermination	Logigrammes
COMPLÉMENT	$S = \bar{a} = \overline{a.a}$	
ET	$S = a.b = \overline{\overline{a.b}}$	
OU	$S = a + b = \overline{\overline{a+b}} = \overline{\bar{a}.\bar{b}}$	

Utilisation de cellules NOR.

Opérations à réaliser	Détermination	Logigrammes
COMPLÉMENT	$S=\bar{a}=\overline{a+a}$	
ET	$S=a.b=\overline{\overline{a.b}}=\overline{\bar{a}+\bar{b}}$	
OU	$S=a+b=\overline{\overline{a+b}}$	

Utilisation de cellules ET INCLUSIF (IDENTITÉ).

On pourrait démontrer comme précédemment que les cellules IDENTITÉ sont universelles.

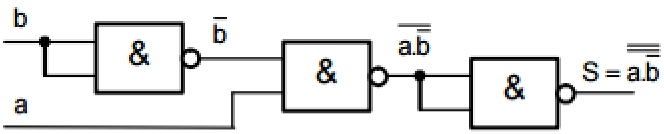
Méthode pour recomposer une fonction.

Il est souvent intéressant de complémenter deux fois la fonction à recomposer afin de faire apparaître la fonction COMPLÉMENT plus souvent.

Exemple : $S=a.\bar{b}$

Utilisation de cellules NAND

$S=a.\bar{b}=\overline{\overline{a.\bar{b}}}$



Utilisation de cellules NOR

$S=a.\bar{b}=\overline{\overline{a.\bar{b}}}=\overline{\bar{a}+b}$