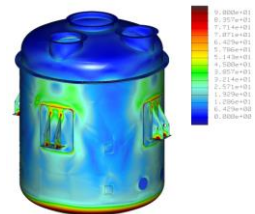
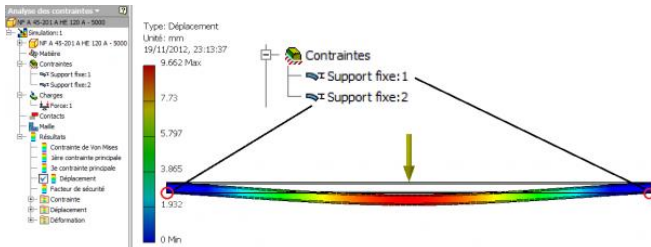


Cycle 4: Etudier et modéliser les solides déformables

Chapitre 2 : Résistance des matériaux



Problématique

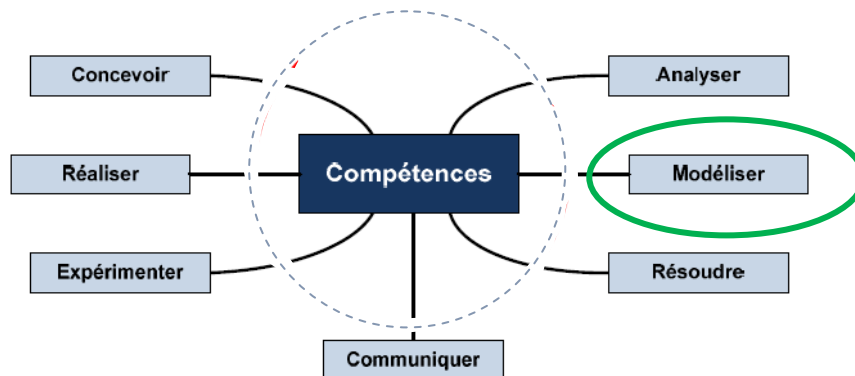
La **mécanique des structures industrielles** (robot, portique, ferme, pont, pale d'hélice,...) permet de prévoir le comportement des structures sous charges par la détermination des **résistances et des déformations des pièces** constitutives. Elle permet de prévoir les dimensions, les formes et les matériaux des pièces afin que ces éléments puissent assurer leur fonction dans les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

Comment déterminer les déformations et contraintes dans un solide soumis aux sollicitations simples de la RDM ?

Savoir

B. Modéliser:

- Déterminer le torseur de cohésion dans une section droite
- Identifier les sollicitations et contraintes en un point d'une poutre
- Associer le modèle de poutre du solide déformable globalement en petites déformations



SOMMAIRE

Les poutres droites

1. Définitions
2. Géométrie
3. Propriétés géométriques de la section droite moyenne, section droite
4. Hypothèses sur le comportement des poutres droites

Approche efforts

1. Modélisation des actions extérieures : champ linéique d'efforts et efforts concentrés
2. Modélisation des efforts intérieurs : torseur de cohésion dans une section droite (coupure, repère local)
3. Equations d'équilibre
4. Notations
5. Champ des contraintes dans une section droite

Approche cinématique

1. Hypothèse de Navier Bernoulli
2. Hypothèse des petits déplacements : torseur des petits déplacements d'une section droite
3. Torseur des déformations

Comportement élastique linéaire des matériaux

1. Loi de comportement par rapport aux phénomènes d'extension et de glissement
2. Module d'élasticité longitudinal E, coefficient de Poisson ν , module d'élasticité transversal G, limite conventionnelle d'élasticité $R_{0,2\%}$

Applications aux sollicitations classiques

1. Traction pure
2. Torsion pure des cylindres de révolution
3. Flexion plane
4. Cisaillement

Critères de tenue mécanique

1. Déformation
2. Résistance mécanique
3. Déplacement ou raideur en un point donné de la ligne moyenne
4. Coefficient de sécurité
5. Concentrations de contraintes



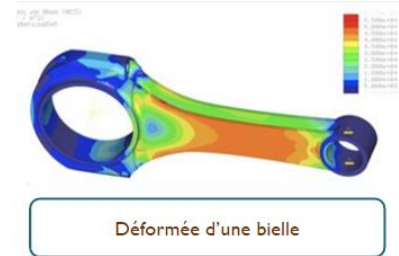
Résistance des matériaux

Objectif du cours:

En statique et en dynamique, on suppose les solides indéformables. Cette hypothèse est intéressante car les calculs des actions mécaniques et des lois de mouvement sont ainsi simplifiés et les erreurs induites par cette hypothèse sont généralement faibles.

La **mécanique des structures industrielles** (robot, portique, ferme, pont, pale d'hélice,...) permet de prévoir le comportement des structures sous charges par la détermination des **résistances et des déformations des pièces** constitutives. Elle permet de prévoir les dimensions, les formes et les matériaux des pièces afin que ces éléments puissent assurer leur fonction dans les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

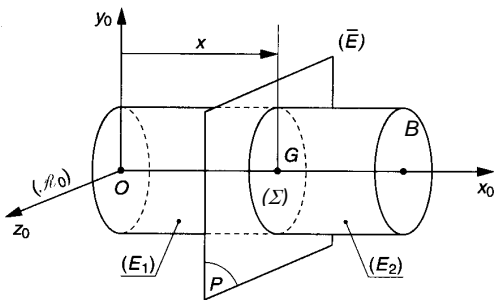
Les structures étudiées devront pouvoir se modéliser en un système de **poutres droites**. La théorie des poutres droites s'appuie sur un certain nombre d'hypothèses qui vont être exposées dans ce chapitre.



1. Poutres droites

1.1. Définitions

Une poutre droite « E » est un solide globalement déformable, engendré par la translation d'une aire plane « Σ » dont le centre d'inertie « G » décrit un segment de droite orienté de « O » vers « B ».



Le segment « OB » est appelé **ligne moyenne de la poutre**.

La section « Σ » est appelée **section droite de la poutre**.

Le repère de référence $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ est le repère orthonormé direct lié à la poutre non déformée. Il permet de définir les déplacements des sections et des points de la poutre après le chargement.

Le repère local $R(G, x, y, z)$ est le repère orthonormé direct lié à la section droite tel qu'à l'état initial $\vec{x} = x_0; y = y_0; z = z_0$.

- ✓ « x » est l'abscisse de la position de la section droite « Σ » tel que : $\vec{OG} = x \vec{x}_0$
- ✓ « E₁ » est la partie de la poutre définie par l'ensemble des points d'abscisse inférieure ou égale à « x » ;
- ✓ « E₂ » est la partie de la poutre définie par l'ensemble des points d'abscisse supérieure à « x ».

1.2. Géométrie

- ✓ La ligne moyenne est portée par \vec{x}_0 ;
- ✓ La dimension de la section droite « Σ » reste constante au cours de sa translation de « O » vers « B », ou s'il elle varie, cette variation doit rester faible et progressive ;
- ✓ Les dimensions transversales de la poutre droite restent petites devant la longueur « L » du segment « OB » : $L > 10 \times a$ avec « a » plus grande dimension transversale ;
- ✓ La poutre possède un plan de symétrie : soit le plan (\vec{x}_0, \vec{y}_0) soit le plan (\vec{x}_0, \vec{z}_0)





Résistance des matériaux

1.3. Propriétés géométriques de la section droite moyenne

Pour certains types de sollicitations des poutres droites, la répartition de matière par rapport aux axes de déformation intervient sous la forme d'expressions appelées « **moment quadratique** ». Il est indispensable pour calculer la résistance et la déformation des poutres sollicitées en torsion et en flexion. En effet, la résistance d'une section sollicitée selon un axe donné varie avec son moment quadratique selon cet axe.

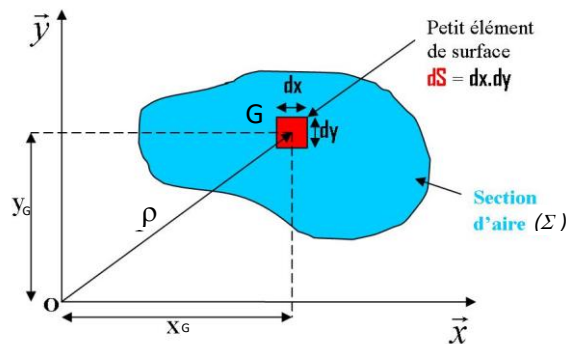
(Ne pas confondre avec les moments et produits d'inertie vus en cinétique)

1.3.1. Moment quadratique d'une surface plane par rapport à un axe de son plan



$$I_{O\bar{x}} = \int_{\Sigma} y^2 ds \text{ Unité: mm}^4$$

Remarque: $I_{O\bar{x}} \geq 0$



1.3.2. Théorème de Huyghens



$$I_{O\bar{x}} = I_{G\bar{x}} + S y_G^2$$

1.3.3. Moment quadratique polaire d'une surface plane par rapport à un point de son plan



$$I_O = \int_{\Sigma} \rho^2 ds = \int_{\Sigma} (x^2 + y^2) ds$$

1.3.4. Propriétés



$$I_O = I_{O\bar{x}} + I_{O\bar{y}} \text{ avec } I_{O\bar{x}} \perp I_{O\bar{y}}$$

1.3.5. Applications

(Voir TD pour démonstration)

I_{GZ} (mm ⁴)	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$
I_0 (mm ⁴)	$\frac{bh^3 + hb^3}{12}$	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$



1.4. Hypothèses sur le comportement des poutres droites

1.4.1. Matériaux de construction

On fait l’hypothèse que les matériaux constituant les poutres et utilisés dans le cadre des études relatives à ce cours doivent posséder les propriétés suivantes:

- ✓ Les discontinuités microscopiques dues à la nature des matériaux de construction (grains, mailles,) sont négligées (**matériau continu**);
- ✓ La constitution du matériau doit être la même en chaque point de la poutre (**matériau homogène**);
- ✓ Les matériaux doivent avoir, en un même point, les mêmes propriétés physiques dans toutes les directions (**matériau isotrope**);
- ✓ Les matériaux doivent avoir un **domaine de comportement élastique**. Les solides devront reprendre leur forme et leur volume à la suppression du chargement.



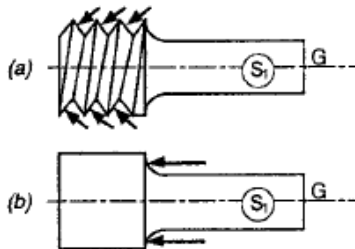
Matériau continu, homogène, isotrope et élastique

1.4.2. Hypothèses sur les efforts appliqués à la poutre

- ✓ Les **efforts sont supposés être appliqués progressivement** (non brutalement).
- ✓ Les déplacements sous charges étant petits, les **efforts extérieurs sont supposés invariants** dans $R_0(O, \dot{x}_0, y_0, z_0)$.

1.4.3. Hypothèses de **Barré de Saint-Venant**

L’état des sollicitations dans une section droite de centre G située dans une **zone éloignée des points d’applications des charges extérieures** appliquées à la poutre ne dépend que du torseur associé à ces charges.



$$\underbrace{\left\{ F(\bar{S}_1 \rightarrow S_1) \right\}}_a = \underbrace{\left\{ F(\bar{S}_1 \rightarrow S_1) \right\}}_b$$

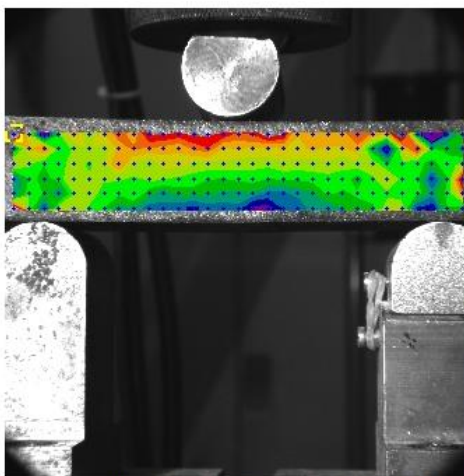


Figure 3 : Déformations ϵ_{xx} dans la poutre 1

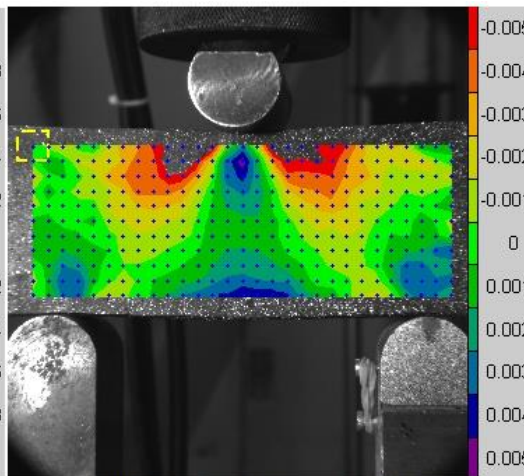


Figure 4 : Déformations ϵ_{xx} dans la poutre 2

Nous pouvons constater que sur l’éprouvette de gauche et dans la zone située entre les deux appuis, les lignes d’isovaleurs sont approximativement horizontales. Ceci illustre bien la linéarité de cette déformation le long de l’axe y. L’éprouvette est bien soumise à la traction sous la fibre neutre, et à la compression au dessus. Ainsi, en se plaçant loin des appuis pour une éprouvette qui respecte la géométrie poutre, les résultats des mesures se rapprochent de ceux obtenus par le calcul. Par contre, il apparaît clairement que l’éprouvette de droite ne suit pas les règles de la théorie des poutres.

Résistance des matériaux

1.4.4. Hypothèses de Navier Bernoulli

Les sections planes, normales à la ligne moyenne avant chargement **restent planes et normales à la ligne moyenne** après chargement (hypothèse de Navier Bernoulli).

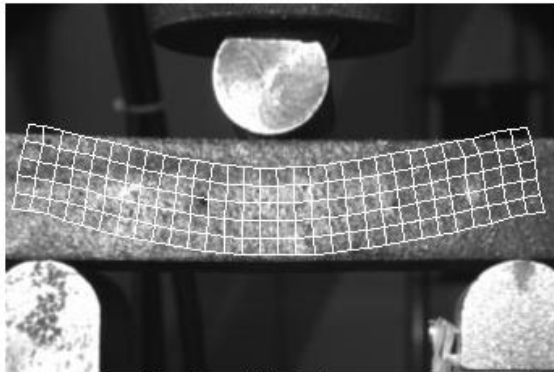
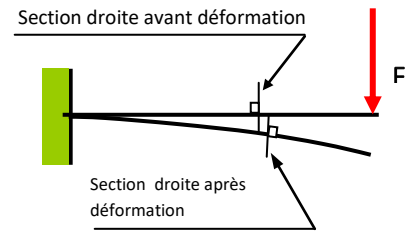


Figure 5 : Déformée amplifiée de la poutre soumise à de la flexion 3 points

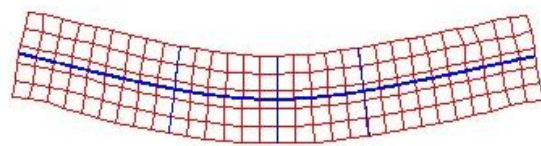
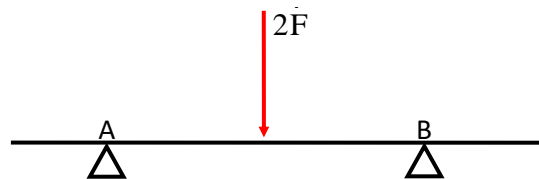
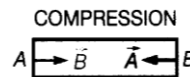
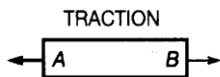


Figure 6 : Déformée amplifiée de la poutre avec la ligne moyenne et les sections droites

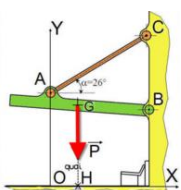
2. Approche des efforts

2.1. Modélisation des actions extérieures : champ linéique d'efforts et efforts concentrés

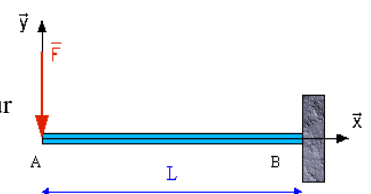
En **mécanique des structures**, les **actions mécaniques, appliquées en un point, sont des vecteurs glissants**. Il est impossible de les remplacer par un système d'actions mécaniques « vectoriellement » équivalent (même résultante et même moment en un point A) car les effets physiques (solllicitations) sont différents.



- ✓ Le chargement de la poutre se fait dans le plan de symétrie de celle-ci.
- ✓ Le chargement se fait lentement et régulièrement.
- ✓ Il n'existe que deux types de chargement:

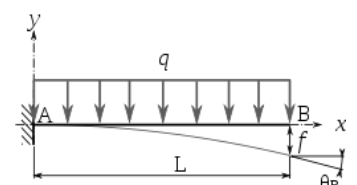
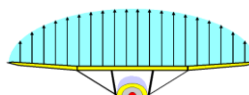


- **Action mécanique concentrée** (ou localisée) représentée par un glisseur



- **Action mécanique répartie** représentée par sa densité linéique q_L en N/m ou surfacique q_s en N/m²

Exemples : Répartition uniforme de la neige sur un toit (charge surfacique) ou charge répartie due au poids propre d'un profilé IPN.





Résistance des matériaux

2.1.1. Efforts concentrés

Représentant local :

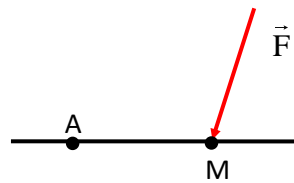
La poutre est soumise à une charge concentrée $\vec{F}_{(\bar{E} \rightarrow E)} = X\vec{x}_0 + Y\vec{y}_0 + Z\vec{z}_0$ appliquée au point M tel que :

$$\vec{AM} = x_M\vec{x}_0 + y_M\vec{y}_0 + z_M\vec{z}_0.$$

Représentant global :

Le torseur associé à l'action mécanique $\vec{F}_{(\bar{E} \rightarrow E)}$ a pour expression :

$$\{F(\bar{E} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{l} X \quad y_M Z - z_M Y \\ Y \quad z_M X - x_M Z \\ Z \quad x_M Y - y_M X \end{array} \right\}_A^{R_0}$$



2.1.2. Efforts répartis (Champ linéique d'efforts)

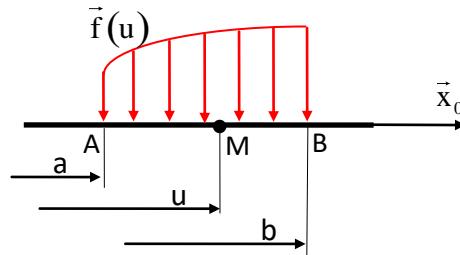
Représentant local :

La poutre « E » est soumise à une répartition de charge linéaire de densité $\vec{f}(u)$ pour $u \in [A,B]$.

Représentant global :

Le torseur associé à cette répartition de charge a pour expression :

$$\{F(\bar{E} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(Ext \rightarrow S)} = \int_a^b \vec{f}(u) du \\ \vec{M}_{A(Ext \rightarrow S)} = \int_a^b \vec{AM} \wedge \vec{f}(u) du \end{array} \right\}_A^{R_0}$$



2. Modélisation des efforts intérieurs : torseur de cohésion dans une section droite (coupure, repère local)

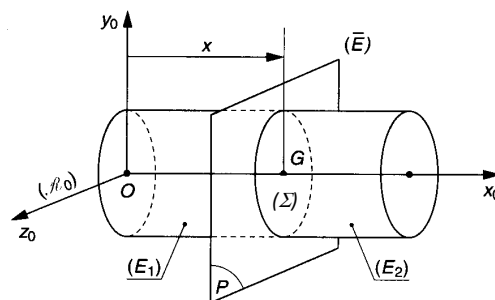
Soit « E » le solide assimilé à une poutre et « \bar{E} » l'ensemble extérieur à « E ».

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est le repère lié à « E » tel que \vec{x}_0 est confondu avec la ligne moyenne.

Considérons un plan « P » normal à \vec{x}_0 définissant la section droite « Σ » de « E ».

Soit G le centre d'inertie de la surface « Σ », $\vec{OG} = x\vec{x}_0$ définissant la position de la section droite par rapport à R_0 .


La coupure fictive par le plan « P » partage la poutre en deux tronçons « E_1 » et « E_2 ».





Résistance des matériaux

Le torseur de cohésion est le torseur associé à l'ensemble des actions mécaniques exercées par le tronçon « E₂ » sur le tronçon « E₁ » de la poutre dont les éléments de réduction sont exprimés au point G centre d'inertie de la surface « Σ » :



$$\left\{ T_{\text{coh } 2 \rightarrow 1} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}(\mathbf{x}) \\ \bar{M}_G(\mathbf{x}) \end{array} \right\}_G$$

Remarques :

- ✓ *Le torseur de cohésion sera toujours le torseur des actions mécaniques exercées par le tronçon de droite « E₂ » sur le tronçon de gauche « E₁ » ;*
- ✓ *Ces actions, non visibles, sont internes au matériau et lui permettent de garder son intégrité physique d'où le nom de cohésion ;*
- ✓ *\bar{R} et \bar{M}_G sont des fonctions de l'abscisse « x » du centre d'inertie « G » de la surface « Σ » ;*
- ✓ *Pour simplifier les écritures, il n'y aura pas d'indices sur les éléments de réduction*

3. Equations d'équilibre

Isolons la poutre complète « E=E₁+E₂ » chargée.

Le principe fondamental de la dynamique s'applique à l'ensemble isolé. Le repère $R_g (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est galiléen.

$$\left\{ F(\bar{E} \rightarrow E) \right\} = \left\{ T_D(E / R_g) \right\}$$

Les actions extérieures appliquées sur la poutre « E » sont les actions à distance et les actions de contact qui comprennent les actions réparties et les actions concentrées.

Isolons le tronçon de poutre complète « E₁ » et étudions son équilibre.

$$\left\{ F(\bar{E}_1 \rightarrow E_1) \right\} = \left\{ T_D(E_1 / R_g) \right\}$$

Avec $\left\{ F(\bar{E}_1 \rightarrow E_1) \right\} = \left\{ F(\bar{E} \rightarrow E_1) \right\} + \left\{ F(E_2 \rightarrow E_1) \right\}$

On en déduit la relation :

$$\left\{ F(E_2 \rightarrow E_1) \right\} = - \left\{ F(\bar{E} \rightarrow E_1) \right\} + \left\{ T_D(E_1 / R_g) \right\}$$

Or $\left\{ F(E_2 \rightarrow E_1) \right\} = \left\{ T_{\text{coh } 2 \rightarrow 1} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}(\mathbf{x}) \\ \bar{M}_G(\mathbf{x}) \end{array} \right\}_G$

Ce qui conduit à écrire :

$$\left\{ T_{\text{coh } 2 \rightarrow 1} \right\} = - \left\{ F(\bar{E} \rightarrow E_1) \right\} + \left\{ T_D(E_1 / R_g) \right\}$$

En isolant le tronçon « E₂ » et en étudiant son équilibre de la même façon que pour le tronçon « E₁ », on obtient :

$$\left\{ T_{\text{coh } 2 \rightarrow 1} \right\} = \left\{ F(\bar{E} \rightarrow E_2) \right\} - \left\{ T_D(E_1 / R_g) \right\}$$

Si le torseur dynamique est nul, on peut écrire les expressions simplifiées suivantes :

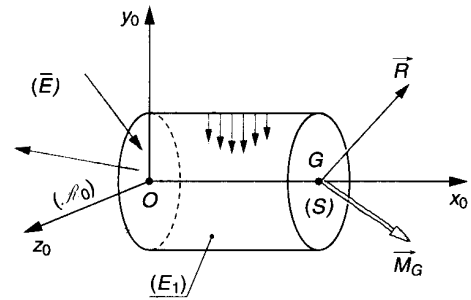
$$\left\{ T_{\text{coh } 2 \rightarrow 1} \right\} = - \left\{ F(\bar{E} \rightarrow E_1) \right\} = \left\{ F(\bar{E} \rightarrow E_2) \right\}$$



Résistance des matériaux

$$\{T_{coh2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(\mathbf{x}) \\ \vec{M}_G(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}_{G(\mathbf{x})} = \begin{Bmatrix} -\vec{R}(\vec{E} \rightarrow E_1) \\ -\vec{M}_G(\vec{E} \rightarrow E_1) \end{Bmatrix}_{G(\mathbf{x})}$$

$$\{T_{coh2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(\mathbf{x}) \\ \vec{M}_G(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}_{G(\mathbf{x})} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(\vec{E} \rightarrow E_2) \\ \vec{M}_G(\vec{E} \rightarrow E_2) \end{Bmatrix}_{G(\mathbf{x})}$$



Suivant les cas, pour simplifier les calculs, on utilise l'une ou l'autre de ces relations.

4. Notations

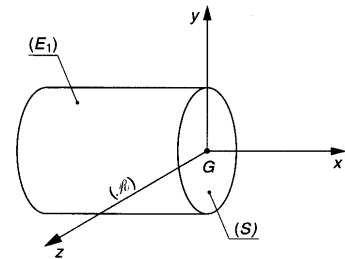
4.1. Repère de définition des sollicitations

Soit $R = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère local associé à la section droite fictive (Σ) .

Ce repère est tel que \vec{x} définit la normale extérieure à (Σ) relative à « E1 ».

\vec{y} et \vec{z} appartiennent alors au plan (P) de la section (Σ) .

Ce repère sera toujours direct.



4.2. Dénomination des éléments de réduction du torseur de cohésion

Soit l'expression suivante du torseur de cohésion :

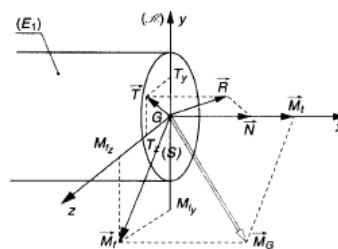
$$\{T_{coh2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(\mathbf{x}) \\ \vec{M}_G(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}_{G(\mathbf{x})} = \begin{Bmatrix} \vec{N}(\mathbf{x}) + \vec{T}(\mathbf{x}) \\ \vec{M}_t(\mathbf{x}) + \vec{M}_f(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}_{G(\mathbf{x})}$$

Par convention, nous appellerons les projections des éléments de réduction en G du torseur de cohésion, sur la base liée à :

- Effort normal : $N = \vec{R} \cdot \vec{x}$
- Effort tranchant suivant \vec{y} : $T_y = \vec{T} \cdot \vec{y}$
- Effort tranchant suivant \vec{z} : $T_z = \vec{T} \cdot \vec{z}$
- Moment de torsion : $M_t = \vec{M}_G \cdot \vec{x}$
- Moment de flexion suivant \vec{y} : $M_{fy} = \vec{M}_G \cdot \vec{y}$
- Moment de flexion suivant \vec{z} : $M_{fz} = \vec{M}_G \cdot \vec{z}$

Ce qui conduit à écrire le torseur de cohésion sous la forme suivante :

$$\{T_{coh2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(\mathbf{x}) \\ \vec{M}_G(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}_{G(\mathbf{x})} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{G(\mathbf{x})}^R$$

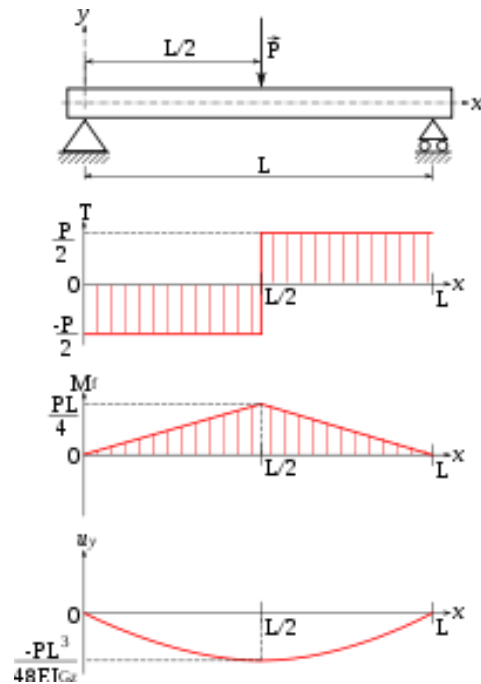


4.3. Diagrammes

Les composantes algébriques N , T_y , T_z , M_t , M_{fy} et M_{fz} varient en fonction de la position du centre de surface G de la section droite fictive (Σ) suivant l'axe « x ».

La représentation graphique de ces composantes qui sont des fonctions de « x » donne les **diagrammes des composantes des éléments de réduction en G du torseur de cohésion**.

La représentation graphique de l'évolution des composantes du torseur de cohésion le long de la poutre permet la recherche des zones les plus sollicitées.

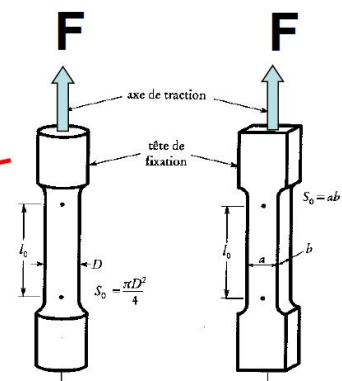
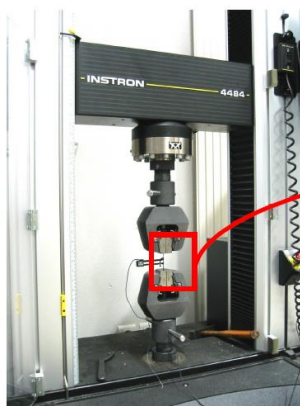


3. Comportement élastique linéaire des matériaux

3.1. Loi de comportement par rapport aux phénomènes d'extension et de glissement

3.1.1. Essai de traction

L'essai de traction consiste à exercer sur une éprouvette normalisée des forces croissantes qui vont la déformer progressivement puis la rompre.

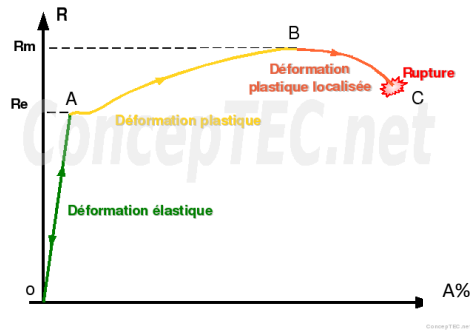
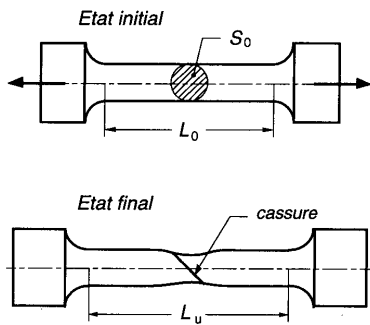


La déformation se passe en trois phases :

- ✓ De O à A, c'est la phase de déformation élastique : la déformation est réversible ;
- ✓ De A à B, la déformation est plastique ;
- ✓ De B à C, la déformation plastique se localise dans une petite portion de l'éprouvette et n'est plus homogène : c'est le phénomène de striction. Le point C caractérise la rupture de l'éprouvette.



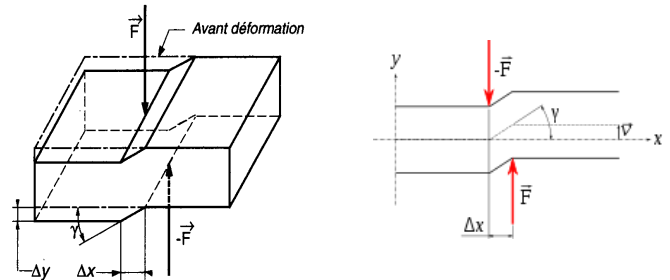
Résistance des matériaux



- ✓ S0 et L0 sont respectivement la section et la longueur initiale de l'éprouvette.
- ✓ L est la longueur mesurée en cours d'essai ;
- ✓ LU est la longueur de l'éprouvette assemblée après la rupture.

3.1.2. Cisaillement

L'essai de cisaillement consiste à charger une éprouvette avec deux actions mécaniques « \vec{F} » et « $-\vec{F}$ » distantes de « Δx ». L'éprouvette se déforme, mais comme elle est encastrée des deux cotés, les sections droites ne peuvent pas tourner l'une par rapport à l'autre : elles ne peuvent que glisser transversalement.



3.2. Module d'élasticité longitudinal E, coefficient de Poisson ν, module d'élasticité transversale G, limite conventionnelle d'élasticité R_{0,2%}

3.2.1. Module d'élasticité longitudinale

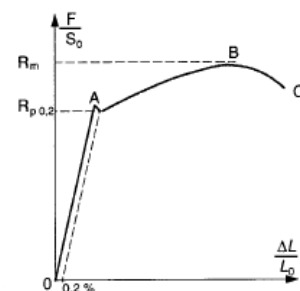
Dans la première portion de la courbe, il y a proportionnalité entre la charge et la déformation. La **loi de Hooke** traduit cette linéarité :

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xx} = E \epsilon_x(x)$$

E est le module d'élasticité transversal aussi appelé **module d'Young**.

3.2.2. Charge unitaire à la limite conventionnelle d'élasticité R_{0,2%}

Elle est obtenue en traçant une parallèle à la droite de Hooke, passant par l'abscisse des allongements permanents à 0,2%.



3.2.3. Allongement en % après rupture

$$A\% = \frac{100(L_U - L_0)}{L_0}$$

LU est la longueur de la poutre assemblée après la rupture.

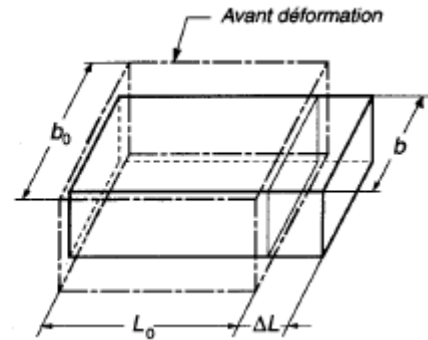
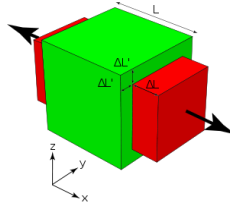


3.2.4. Coefficient de Poisson

La déformation longitudinale s'accompagne d'une déformation de contraction transversale.

$$\epsilon_x(\mathbf{x}) = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\epsilon_y(\mathbf{x}) = \frac{\Delta b}{b_0}$$



$$\nu = \frac{|\epsilon_y(\mathbf{x})|}{|\epsilon_x(\mathbf{x})|} : \text{Coefficient de Poisson}$$

3.2.5. Module d'élasticité transversal

Lors de l'essai de cisaillement, les sections planes distantes d'une valeur « Δx » glissent l'une par rapport d'une valeur « Δy ». La contrainte tangentielle est proportionnelle au rapport « $\Delta y/\Delta x$ ».

$$\sigma_{xy} = G \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Comme il n'y a pas de rotation des sections droites l'une par rapport à l'autre ($\bar{\theta}(\mathbf{x}) = \vec{0}$).

$$\sigma_{xy} = G \epsilon_y$$



G est le module d'élasticité transversal (ou module de Coulomb).

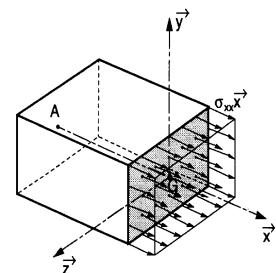
4. Applications aux sollicitations classiques

4.1. Traction pure

4.1.1. Torseur de cohésion

Le torseur de cohésion est de la forme suivante :

$$\{T_{coh2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{R}(\mathbf{x}) \\ \bar{M}_G(\mathbf{x}) \end{array} \right\}_{G(\mathbf{x})} = \left\{ \begin{array}{cc} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{G(\mathbf{x})}^R = \left\{ \begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$



4.1.2. Torseur des petits déplacements

Le torseur des petits déplacements d'une section droite est de la forme suivante :
(Tous les points d'une section droite présentent le même déplacement)

$$\{\delta(\mathbf{x})\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\theta}(\mathbf{x}) \\ \bar{U}(\mathbf{x}) \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \theta_x \bar{x} + \theta_y \bar{y} + \theta_z \bar{z} \\ u \bar{x} + v \bar{y} + w \bar{z} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ u \bar{x} \end{array} \right\}_G$$



Résistance des matériaux

4.1.3. Contrainte

Dans une section droite la contrainte est normale :

La loi de Hooke permet d'écrire : $\sigma_{xx} = E \varepsilon_x$

La relation entre torseur de cohésion et contrainte donne : $N = \int_{\Sigma} \sigma_{xx} ds$

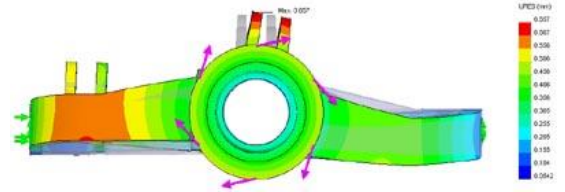
$\Rightarrow N = \sigma_{xx} S \Rightarrow \sigma_{xx} = \frac{N}{S} = E \varepsilon_x$



4.2. Torsion pure des cylindres de révolution

4.2.1. Torseur de cohésion

Le torseur de cohésion est de la forme suivante :



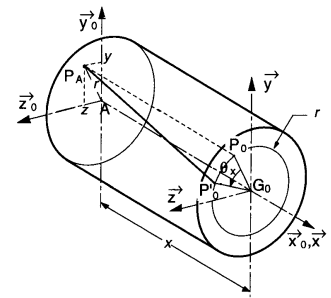
$$\{T_{coh2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}(\mathbf{x}) \\ \bar{M}_G(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}_{G(\mathbf{x})} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{G(\mathbf{x})} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$



4.2.2. Torseur des petits déplacements

Le torseur des petits déplacements d'une section droite est de la forme suivante :

$$\{\delta(\mathbf{x})\} = \begin{Bmatrix} \bar{\theta}(\mathbf{x}) \\ \bar{U}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \theta_x \bar{x} + \theta_y \bar{y} + \theta_z \bar{z} \\ u \bar{x} + v \bar{y} + w \bar{z} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \theta_x \bar{x} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_G$$

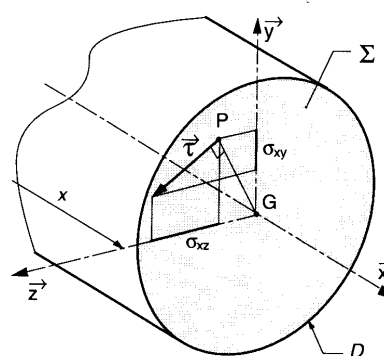


4.2.3. Contrainte

Dans une section droite la contrainte est tangentielle :

$\tau = G \varepsilon \Rightarrow$

$\tau = G \rho \frac{d\theta_x}{dx}$



La relation entre torseur de cohésion et

contrainte donne : $M_t = \int_{\Sigma} \rho \tau ds$

$\Rightarrow M_t = \int_{\Sigma} \rho G \rho \frac{d\theta_x}{dx} ds = G \frac{d\theta_x}{dx} \int_{\Sigma} \rho^2 ds \Rightarrow$

$\Rightarrow M_t = G \frac{d\theta_x}{dx} I_O$

(I_O : moment quadratique polaire)



Résistance des matériaux

En posant : $\frac{d\theta_x}{dt} = \theta$: angle de torsion unitaire (rad/m), on obtient : $M_t = G\theta I_O$



Et comme $\tau = G \rho \theta \Rightarrow G = \frac{\tau}{\rho \theta}$ alors : $\tau = \frac{M_t}{\frac{I_O}{\rho}}$

La **contrainte tangentielle est maximale en périphérie de la poutre**, c'est à dire lorsque $\rho=R$.
(R : rayon de la section droite circulaire)

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{I_O}{R}}$$



4.3. Flexion plane

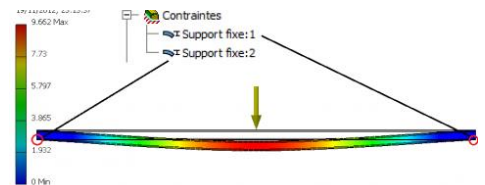
4.3.1. Torseur de cohésion

Le torseur de cohésion est de la forme suivante :

$$\{T_{\text{coh}2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{R}(\mathbf{x}) \\ \bar{M}_G(\mathbf{x}) \end{array} \right\}_{G(\mathbf{x})} = \left\{ \begin{array}{cc} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{G(\mathbf{x})}^R = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\}_{G}$$

On parle alors de **flexion pure**.

Dans la plupart des cas de chargement le torseur de cohésion **comporte un effort tranchant en plus d'un moment de flexion**. On parle alors de flexion simple. Dans cette situation l'effet de l'effort tranchant sera négligé.



4.3.2. Torseur des petits déplacements

Le torseur des petits déplacements d'une section droite est de la forme suivante :

$$\{\delta(\mathbf{x})\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\theta}(\mathbf{x}) \\ \bar{U}(\mathbf{x}) \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \theta_x \bar{x} + \theta_y \bar{y} + \theta_z \bar{z} \\ u \bar{x} + v \bar{y} + w \bar{z} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \theta_z \bar{z} \\ \bar{0} \end{array} \right\}_G$$



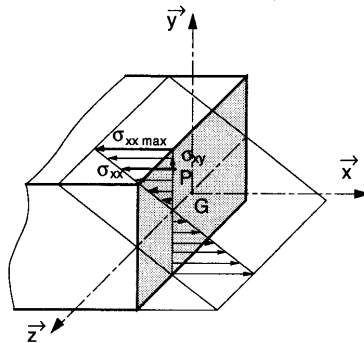
Résistance des matériaux

4.3.3. Contrainte

Dans une section droite la contrainte est normale :

La loi de Hooke permet d'écrire :

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_x$$



La relation entre torseur de cohésion et contrainte donne : $M_{fz} = - \int_{\Sigma} y \sigma_{xx} ds$

Comme

$$\sigma_{xx} = -Ey \frac{d\theta_x}{dx} \Rightarrow M_{fz} = \int_{\Sigma} yEy \frac{d\theta_x}{dx} ds = E \frac{d\theta_x}{dx} \int_{\Sigma} y^2 ds$$

$$\Rightarrow M_{fz} = \int_{\Sigma} yEy \frac{d\theta_x}{dx} ds = E \frac{d\theta_x}{dx} I_{Gz}$$

(I_{Gz} : moment quadratique)

En posant : $\frac{d\theta_x}{dx} = -\frac{\sigma_{xx}}{Ey}$, on obtient : $\sigma = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y$

La contrainte normale est **maximale en périphérie de la poutre**, c'est à dire lorsque $y = y_{max}$.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y_{max}$$



4.3.4. Déformée (ou flèche)

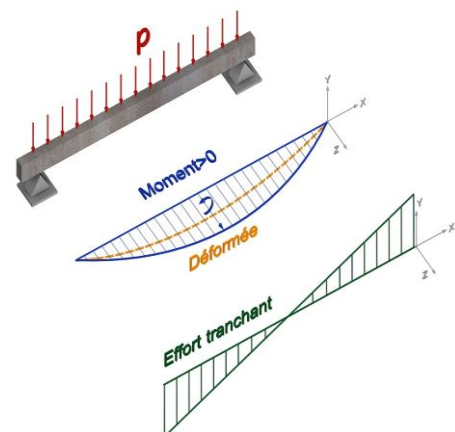
Lorsque la poutre est sollicité en flexion, la section droite se déplace par rotation autour de l'axe (G, z) mais la ligne moyenne de la poutre se déforme également et présente, sous charge, un rayon de courbure local « ρ ».

Si l'on appelle « $y(x)$ » l'équation de la ligne moyenne, et en considérant que la déformation est faible, on peut faire

l'approximation suivante : $\rho(x) \approx \frac{1}{y''(x)}$

On en déduit l'équation différentielle qui permettra de déterminer la déformée d'une poutre droite :

$$M_{fz} == E.I_{Gz}.y''(x)$$





5. Critères de tenue mécanique

5.1. Déformation

L'analyse des déformées conduit à choisir les dimensions et les formes de la section plane de la poutre compatibles avec les déformations acceptables par le cahier des charges. Ce qui revient à choisir un moment polaire ou un moment quadratique pour un matériau donné caractérisé par son module d'élasticité transversale et ou longitudinale.

5.2. Résistance mécanique

Des essais permettent de connaître les contraintes limites que peut supporter un matériau pour rester dans le domaine élastique : R_e (résistance élastique) et R_g (résistance au glissement).

Il suffit alors d'écrire :

$$\checkmark \quad \tau_{\max} < R_g \text{ (Torsion, cisaillement)}$$

$$\checkmark \quad \sigma_{\max} < R_e \text{ (Traction, flexion)}$$

5.3. Coefficient de sécurité

La prise en compte des simplifications nécessaires à la modélisation nécessite d'utiliser un coefficient de sécurité « $s > 1$ ». On peut alors définir R_{pe} et R_{pg} respectivement **résistance pratique élastique** et **résistance pratique au glissement**.

$$R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

$$R_{pg} = \frac{R_g}{s}$$



$$\checkmark \quad \text{On écrira alors : } \tau_{\max} < R_{pg} \text{ (Torsion, cisaillement)}$$

$$\sigma_{\max} < R_{pe} \text{ (Traction, flexion)}$$

5.4. Concentrations de contraintes

Des **variations brusques de section** (épaulement, gorge, filetage sur les arbres) sont incompatibles avec le modèle de poutre droite. Ces variations induisent des variations locales de la contrainte. On utilise alors un **coefficient de concentration de contrainte** « k ».

$$\text{On écrira alors : } k\tau_{\max} < R_{pg} \quad , \quad k\sigma_{\max} < R_{pe}$$

$$2 < k < 3,5$$

