

**I - FT312 : ASSURER LE MOUVEMENT DE LACET**

**Q10 : Justification de la forme de la matrice d'inertie de  $\Sigma$**

La matrice d'inertie de l'ensemble  $\Sigma = \{1, 2, 3, R_{2g}, R_{2d}, R_{3g}, R_{3d}, 4, 4'\}$  est donnée diagonale :

$$I(C_1, \Sigma) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)} ; \text{ les produits d'inertie sont nuls car l'ensemble } \Sigma \text{ présente deux plans de}$$

symétrie :  $(C_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  et  $(C_1, \bar{z}_1, \bar{x}_1)$ .

**Q11 : Détermination de la somme des efforts normaux de contact ( $Z_{2d} + Z_{2g}$ )**

On isole la plate-forme PF. Attention, l'ensemble  $\Sigma = \{1, 2, 3, R_{2g}, R_{2d}, R_{3g}, R_{3d}, 4, 4'\}$  n'inclus pas les roues motrices 1 qui lorsqu'elles tournent, occasionnent l'angle de lacet  $\varphi$

Le théorème du moment dynamique appliqué en  $I_1$  à PF en mouvement dans le référentiel  $R_0$  galiléen, projeté sur l'axe  $\bar{x}_L$ , s'écrit :

$$\overline{\delta}_{I_1}(PF/0) \cdot \bar{x}_L = \overline{M}_{I_1}(0 \rightarrow R_{2d}) \cdot \bar{x}_L + \overline{M}_{I_1}(0 \rightarrow R_{2g}) \cdot \bar{x}_L + \overbrace{\overline{M}_{I_1}(0 \rightarrow R_{1d}) \cdot \bar{x}_L}^{\text{sol/roue 1}} + \overbrace{\overline{M}_{I_1}(0 \rightarrow R_{1g}) \cdot \bar{x}_L}^{\text{sol/roue 1}} + \overbrace{\overline{M}_{I_1}(g \rightarrow \Sigma) \cdot \bar{x}_L}^{\text{poids total}} + \overbrace{\overline{M}_{I_1}(g \rightarrow R_{1d}) \cdot \bar{x}_L}^{\text{sol/roue 1}} + \overbrace{\overline{M}_{I_1}(g \rightarrow R_{1g}) \cdot \bar{x}_L}^{\text{sol/roue 1}}$$

$$\overline{\delta}_{I_1}(PF/0) \cdot \bar{x}_L = \overbrace{\overline{M}_{I_1}(0 \rightarrow R_{2d}) \cdot \bar{x}_L}^{\text{négligeable}} + \overbrace{\overline{M}_{I_1}(0 \rightarrow R_{2g}) \cdot \bar{x}_L}^{-bZ_{2d}} + \left( \overbrace{\overline{I_1 C_1 + C_1 G} \wedge (-m_\Sigma g \bar{z}_0)}^{\text{poids total}} \cdot \bar{x}_L \right) + \underbrace{\overline{e \bar{x}_L \wedge \bar{R}(0 \rightarrow R_{1d}) \cdot \bar{x}_L}}_0 + \underbrace{\overline{-e \bar{x}_L \wedge \bar{R}(0 \rightarrow R_{1g}) \cdot \bar{x}_L}}_0 + \underbrace{\overline{(e \bar{x}_L + R \bar{z}_L) \wedge (-m_r g \bar{z}_0) \cdot \bar{x}_L}}_0 + \underbrace{\overline{(-e \bar{x}_L + R \bar{z}_L) \wedge (-m_r g \bar{z}_0) \cdot \bar{x}_L}}_0$$

D'où :  $Z_{2d} + Z_{2g} = \frac{a_G}{b} m_\Sigma g \sin \beta$   
 A.N. :  $Z_{2d} + Z_{2g} = 8 \text{ N}$

Remarque : En l'absence de précision dans l'énoncé, on suppose la masse des motoréducteurs incluse dans  $m_\Sigma$ .

Au repos, lorsque le robot repose sur ses six roues, les roues de chaque pôle supportent le poids du pôle en question et des roues associées :

$$\left( Z_{2d} + Z_{2g} \right)_{\text{repos}} = (m_2 + 2m_r) g \quad \text{A.N. : } \left( Z_{2d} + Z_{2g} \right)_{\text{repos}} = 590 \text{ N}$$

La "solidification" des trois pôles en mode "4 roues déplacement" permet de soulager les roues arrière (le réglage des efforts normaux de contact étant possible par le choix de l'angle de cabrage  $\beta$ ) : les efforts de frottement du sol sur ces roues durant le pivotement seront alors faibles.

**Q12 : Energie cinétique galiléenne de l'ensemble en mouvement**

On note  $E = \{\Sigma, R_{1d}, R_{1g}, M_{1g}, M_{1d}\}$  et  $T(S/0)$  l'énergie cinétique galiléenne du solide  $S$  en mouvement dans le référentiel  $0$  galiléen.

$$T(E/0) = T(\Sigma/0) + T(R_{1d}/0) + T(R_{1g}/0) + T(M_{1g}/0) + T(M_{1d}/0)$$

- $T(\Sigma/0) = \frac{1}{2} \underbrace{\{C(\Sigma/0)\}}_{\text{torseur cinétique}} \otimes \underbrace{\{V(\Sigma/0)\}}_{\text{torseur cinématique}}$

$$\{V(\Sigma/0)\} = \begin{matrix} \dot{\phi} \bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{matrix}_{C_1}; \{C(\Sigma/0)\} = \begin{matrix} m_\Sigma \bar{V}(G, \Sigma) \\ \bar{\sigma}(C_1, \Sigma) \end{matrix}_{C_1} \quad T(\Sigma/0) = \frac{1}{2} \dot{\phi} (\bar{\sigma}(C_1, \Sigma) \bar{z}_0)$$

*à mettre ds Br matricielle [I(C1, Σ)]*

$$\bar{\sigma}(C_1, \Sigma/0) = [I(C_1, \Sigma)] [\bar{\Omega}(\Sigma/0)] = \dot{\phi} (B \sin \beta \bar{y}_1 + C \cos \beta \bar{z}_1) \quad \text{car } (\bar{z}_0) \text{ projeté ds base 1}$$

$$T(\Sigma/0) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 (B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta)$$

! les 2 roues matricielles tournent sur elles m et sens inverse et donne vitesse et φ

- $T(R_{1g}/0) = \frac{1}{2} \underbrace{\{C(R_{1g}/0)\}}_{\text{torseur cinétique}} \otimes \underbrace{\{V(R_{1g}/0)\}}_{\text{torseur cinématique}}$

Avec :

$$\star \bar{\Omega}(R_{1g}/0) = \underbrace{\bar{\Omega}(R_{1g}/\Sigma)}_{\frac{e}{R} \dot{\phi} \bar{x}_L} + \underbrace{\bar{\Omega}(\Sigma/0)}_{\dot{\phi} \bar{z}_L} \quad \text{car : } \overline{V_{11} R_{1g}/0} = \bar{0}(RSG)$$

*mat rot roue n'a RSG*

$$\text{et } \overline{V_{11} R_{1g}/0} = \overline{V_{11}/0} - \overline{V_{11}/R_{1g}}$$

$$e\dot{\phi} = R\dot{\epsilon} \quad \rightarrow \text{la roue tourne donc de } \frac{e\dot{\phi}}{R} = \dot{\epsilon}$$

$$\star \bar{V}(C_{1g} \in R_{1g}/0) = -e\dot{\phi} \bar{y}_L$$

$$\star \{V(R_{1g}/0)\} = \begin{matrix} \dot{\phi} \left( \frac{e}{R} \bar{x}_L + \bar{z}_L \right) \\ -e\dot{\phi} \bar{y}_L \end{matrix}_{C_{1g}}; \{C(R_{1g}/0)\} = \begin{matrix} m_r \bar{V}(C_{1g} \in R_{1g}/0) \\ \bar{\sigma}(C_{1g}, R_{1g}) \end{matrix}_{C_{1g}}$$

$$\star \bar{\sigma}(C_{1g}, R_{1g}) = [I(C_{1g}, R_{1g})] [\bar{\Omega}(R_{1g}/0)] = \dot{\phi} \left( \frac{e}{R} A_r \bar{x}_L + B_r \bar{z}_L \right)$$

Donc:

$$T(R_{1g}/0) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \left[ m_r e^2 + \left( \frac{e}{R} \right)^2 A_r + B_r \right]$$

- $T(R_{1d}/0) = T(R_{1g}/0)$

$\frac{e}{R} \dot{\varphi} \vec{z}_2 + \dot{\varphi} \vec{z}_1$

•  $T(M_{1g}/0) = \frac{1}{2} [I(C_1, M_{1g})] [\bar{\Omega}(R_{1g}/0)] \cdot [\bar{\Omega}(R_{1g}/0)]$

$$T(M_{1g}/0) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \left( \left( \frac{e}{kR} \right)^2 A_m + B_m \right)$$

Car : rapport de réduction  $k=1/25$  donc M1 tourne  $1/k$  fois plus vite

•  $T(M_{1d}/0) = T(M_{1g}/0)$

Conclusion :

$$T(E/0) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \left[ B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + 2 \left( m_r e^2 + \left( \frac{e}{R} \right)^2 A_r + B_r + \left( \frac{e}{kR} \right)^2 A_m + B_m \right) \right]$$

**Q13 : Expression du couple moteur**

L'ensemble E étant isolé, on lui applique le théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel 0 galiléen :

$$\frac{dT(E/0)}{dt} = P(\bar{E} \rightarrow E/0) + P_i(E)$$

•  $P(\bar{E} \rightarrow E/0) = \underbrace{P(g \rightarrow E/0)}_{0 : \text{pas de mouvement selon } \vec{z}_0} + P(0 \rightarrow E/0)$

$P(0 \rightarrow E/0) = \underbrace{P(0 \rightarrow R_{1g}/0) + P(0 \rightarrow R_{1d}/0) + P(0 \rightarrow R_{2g}/0) + P(0 \rightarrow R_{2d}/0)}_{0 : \text{roulements sans glissement des roues motrices sur le sol}} \quad \text{et pas couple roue/sol} \Rightarrow \text{partielle}$

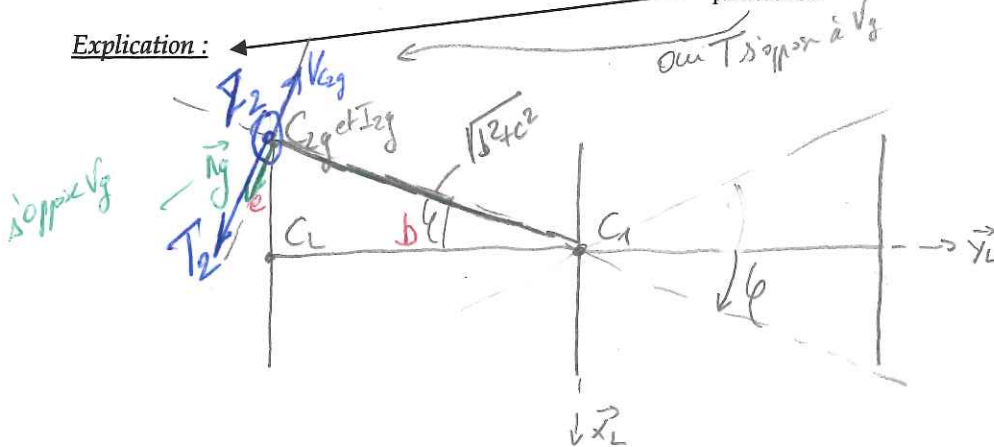
$I_{2g}$  point de contact de la roue  $R_{2g}$  sur le sol :  $P(0 \rightarrow R_{2g}/0) = \vec{R}_{0 \rightarrow R_{2g}} \cdot \underbrace{\vec{V}(I_{2g}, R_{2g}/0)}_{= \vec{V}(C_{2g}, \Sigma/0) \text{ (pas de rotation de la roue par rapport au pôle)}}$

$\vec{V}(C_{2g} \in \Sigma/0) = \underbrace{\bar{\Omega}(\Sigma/0)}_{\dot{\varphi} \vec{z}_0} \wedge \underbrace{\overline{C_1 C_{2g}}}_{-e \vec{x}_L - b \vec{y}_L}$  ;  $\vec{V}(C_{2g} \in \Sigma/0) = \dot{\varphi} (b \vec{x}_L - e \vec{y}_L)$

$\hookrightarrow \text{Eg}_{C_2} = R_{z_2} \Rightarrow \text{donc } \dot{\varphi} \text{ sur axe } \Lambda$

$P(0 \rightarrow R_{2g}/0) = (T_{2g} \vec{n}_g + Z_{2g} \vec{z}_L) \cdot \dot{\varphi} (b \vec{x}_L - e \vec{y}_L) = \underbrace{-\dot{\varphi} T_{2g} \sqrt{b^2 + e^2}}_{< 0 : \text{puissance dissipée par frottement}}$

Explication :



Par analogie,  $P(0 \rightarrow R_{2g} / 0) = -\dot{\phi} T_{2d} \sqrt{b^2 + e^2}$

- Toutes les liaisons du système étant considérées parfaites,  $P_i(E) = P(M_1) + P(M_2) = 2 \left( C_m \frac{e}{kR} \dot{\phi} \right)$

On obtient alors :  $J \dot{\phi} \ddot{\phi} = 2 \left( C_m \frac{e}{kR} \dot{\phi} \right) - \dot{\phi} \sqrt{b^2 + e^2} (T_{2g} + T_{2d})$ , dont on déduit :

$$C_m = \frac{kR}{2e} \left[ \underbrace{J \ddot{\phi} + \sqrt{b^2 + e^2} (T_{2g} + T_{2d})}_{k_1} \right]_{k_2}$$

**Q14: Couple moteur maximal**

L'accélération angulaire maximale est lue sur la figure 4 :  $\ddot{\phi}_{\max} = 1,26 \text{ rad.s}^{-2}$  ; donc :

$$C_m = k_2 \left[ J \ddot{\phi}_{\max} + k_1 \underbrace{(T_{2g} + T_{2d})}_{f(Z_{2g} + Z_{2d})} \right] = k_2 \left[ J \ddot{\phi}_{\max} + k_1 f \frac{a_G}{b} m_2 g \sin \beta \right] \quad \text{A.N. : } C_m = 0,6 \text{ Nm}$$

La vitesse de rotation maximale du robot est  $\dot{\phi}_{\max} = 1,26 \text{ rad.s}^{-1}$  (cf. figure 4), ce qui conduit à une vitesse de rotation maximale des moteurs :  $\omega_{m \max} = \frac{e}{kR} \dot{\phi}_{\max}$  ; A.N. :  $\omega_{m \max} = 47,6 \text{ rad/s} \approx 455 \text{ tours/min}$

A cette fréquence de rotation, le couple que peut fournir le moteur alimenté sous une tension de 48 V est de 2,1 Nm : les moteurs peuvent donc générer la rotation de lacet selon la loi de mouvement désiré.