Cycle 7: Analyser et mettre en place un processus de fabrication par une approche PMP

Chapitre 3 : Mesure et contrôle dimensionnel-géométrique des pièces

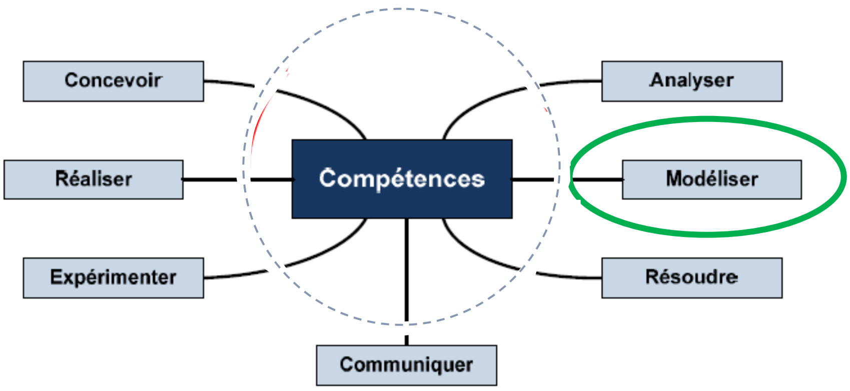
Problématique

Comment contrôler une pièce (géométrie ou dimensions) à partir des exigences du dessin de définition ?

Savoir

B. Modéliser:

- A partir du dessin de définition d'une pièce, vérifier une spécification dimensionnelle ou géométrique



1. Introduction

La métrologie est l'ensemble des techniques et des savoir-faire qui permettent d'effectuer **des mesures** et d'avoir une confiance suffisante dans leurs résultats. La mesure est nécessaire à toute connaissance, à toute prise de décision et à toute action. La logique de toute activité est "observer/mesurer, comprendre, prévoir/agir, mesurer/vérifier".

Mesurer est indispensable pour la recherche : toute recherche vise à modéliser les phénomènes, et doit quantifier des grandeurs dans des unités connues et définies.

Mesurer est également au cœur de toute activité commerciale. Aujourd'hui, aucune transaction commerciale n'échappe à un ensemble complet de mesures de quantités et de qualités des produits.

Mesurer est également une condition incontournable du développement économique et de la compétitivité. Mesurer, c'est connaître les besoins des clients et des utilisateurs des produits et service, c'est maîtriser les nouvelles technologies, c'est être capable de répondre aux attentes des clients, c'est être capable de répondre aux exigences en matière d'environnement, de sécurité, c'est globalement être efficace et compétitif.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la **mesure et au contrôle dimensionnel et géométrique des pièces mécaniques.**

2. Caractérisation des instruments de mesure

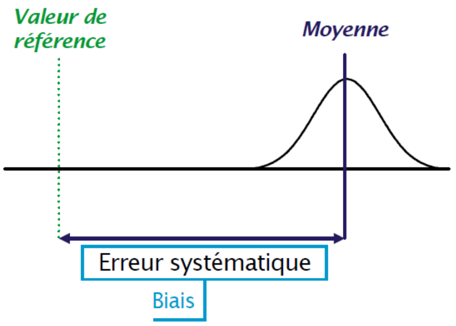
Toute **mesure expérimentale est entachée d'une erreur** qui résulte d'un manque de justesse et/ou de fidélité.
On distingue 2 types de sources d'erreurs :

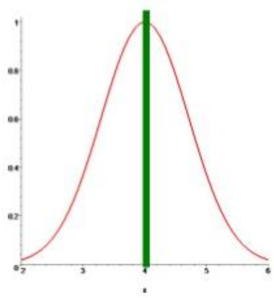
- *Erreurs aléatoires* : fluctuation de la grandeur mesurée ou de la méthode de mesure
- *Erreurs systématique* : souvent un mauvais réglage de l'instrument de mesure, usure, les mesures se répartissent autour d'une valeur qui n'est pas vraie

La qualité des appareils de mesure peut être caractérisée par : **la justesse et la fidélité**
Ces 2 qualités permettent de quantifier la **précision** de l'instrument.

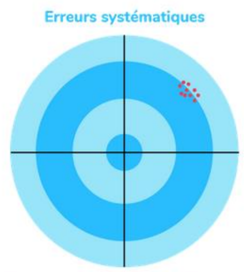
2.1. Justesse

On peut introduire la justesse comme **l'écart moyen à une valeur de référence** d'un grand nombre de valeurs mesurées.
La justesse ne s'exprime pas numériquement, pour la quantifier on va estimer un **biais,** c'est-à-dire l'erreur systématique qui pourra ensuite être corrigée.





Bon centrage: JUSTESSE



Mesures non réparties autour de la valeur vraie donc **manque de justesse**

Formule : $\boxed{j = \bar{L} - M}$ avec $\bar{L} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{n}$

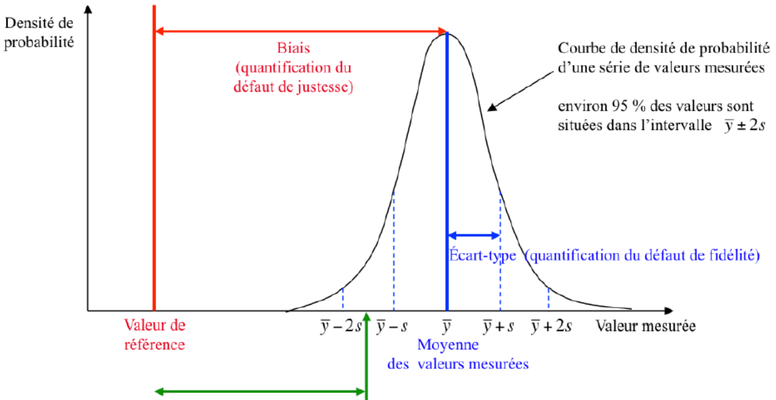
Exemples d'erreurs systématiques : problème d'étalonnage instrument de mesure, erreur de mesure (protocole ou humain)

2.2. Fidélité ou répétabilité

La fidélité est l'aptitude à avoir des **résultats proches les uns des autres** quand on répète une mesure. La fidélité est en général **exprimée numériquement** par des caractéristiques telles que **l'écart-type ou la variance.**

Pour être fidèle, on cherche cette fois à réduire les erreurs aléatoires, en fixant un certain nombre de paramètres susceptibles d'être influant lors du processus de mesure et en les corrigeant (même opérateur, même conditions mesure…).

L'écart type est défini ainsi : $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n}}$ *plus l'écart type est grand plus les valeurs sont dispersées.*



ps : l'exactitude est l'erreur de justesse pour 1 seule mesure

Représentation de l'erreur de mesure, du biais et de l'écart-type

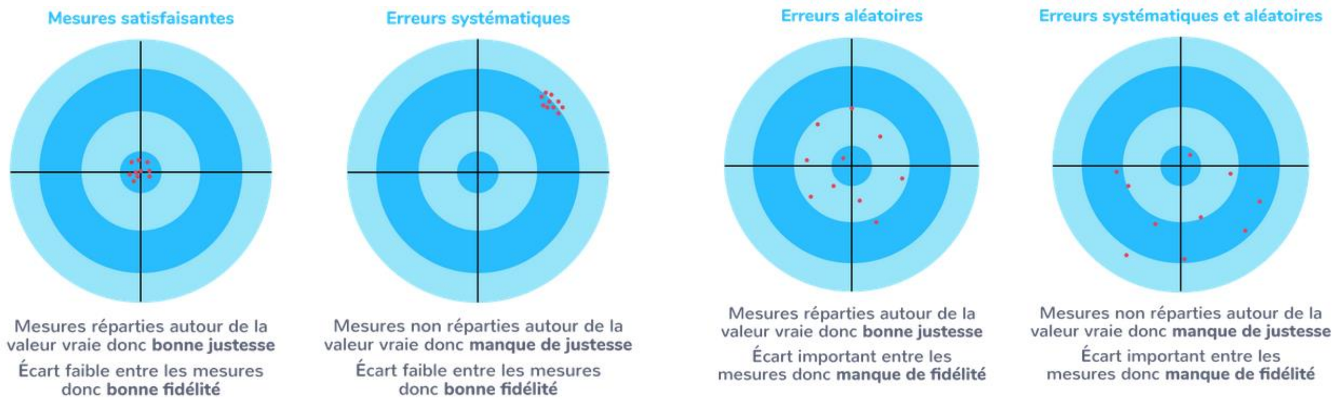
On utilise la courbe de Gauss parce que, dans la quasi-totalité des mesures réalisés avec une méthode normalisée résultant d'une combinaison de phénomènes aléatoires indépendants, la **distribution des valeurs mesurées suit une loi normale.**

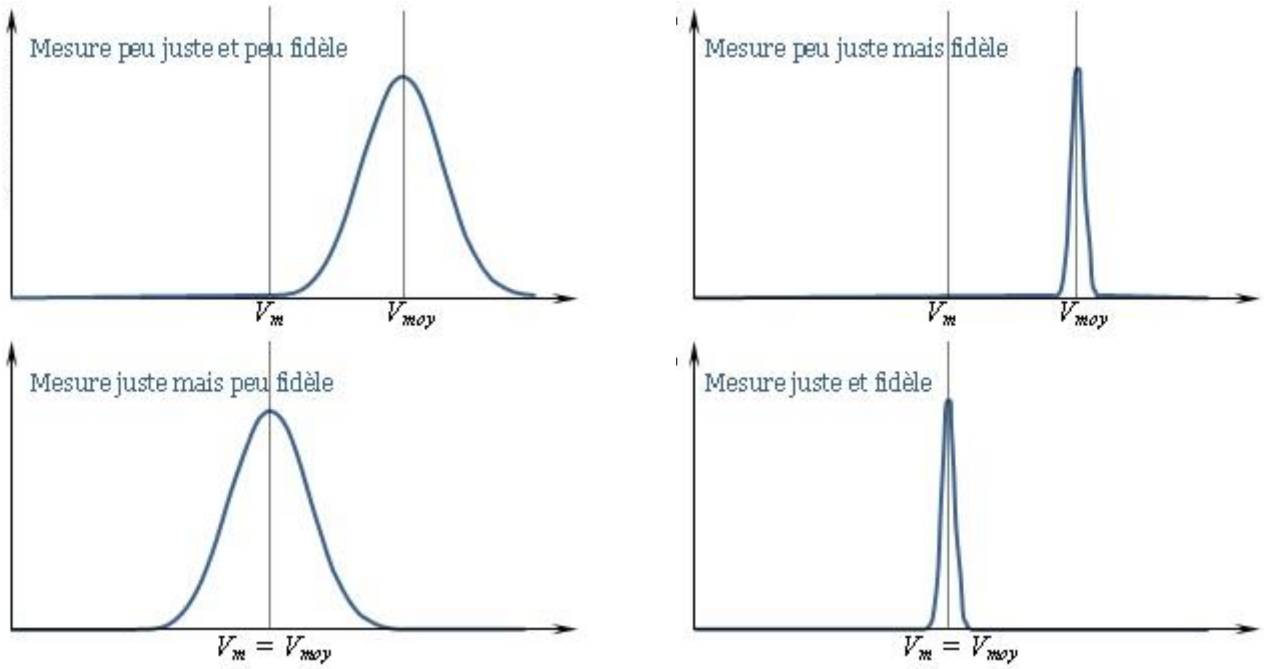
La fidélité caractérise la **dispersion des mesures** L_i d'une même grandeur et se quantifie via l'écart type.

Notion de variance : La variance est un autre indicateur de dispersion des valeurs, utilisé en statistique.
La variance est la **moyenne des carrés des écarts à cette moyenne**

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Synthèse imagée de la justesse et de la fidélité



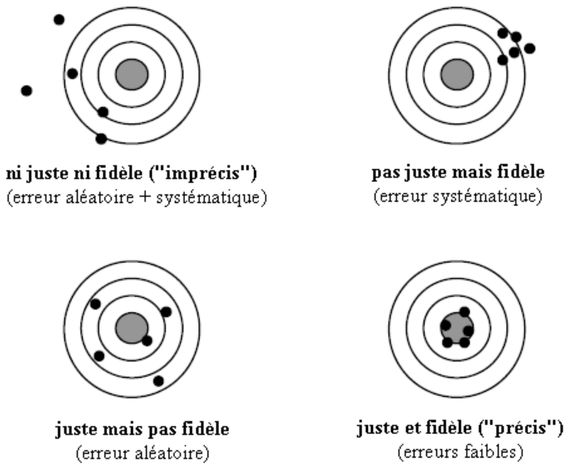


2.3. Résolution

C'est la **plus petite valeur mesurable** par l'instrument de mesure. *(Ex : pied à coulisse non numérique = 1/50ème = 0.02mm , réglet = 1mm, micromètre = 0.01mm)*

2.4. Précision

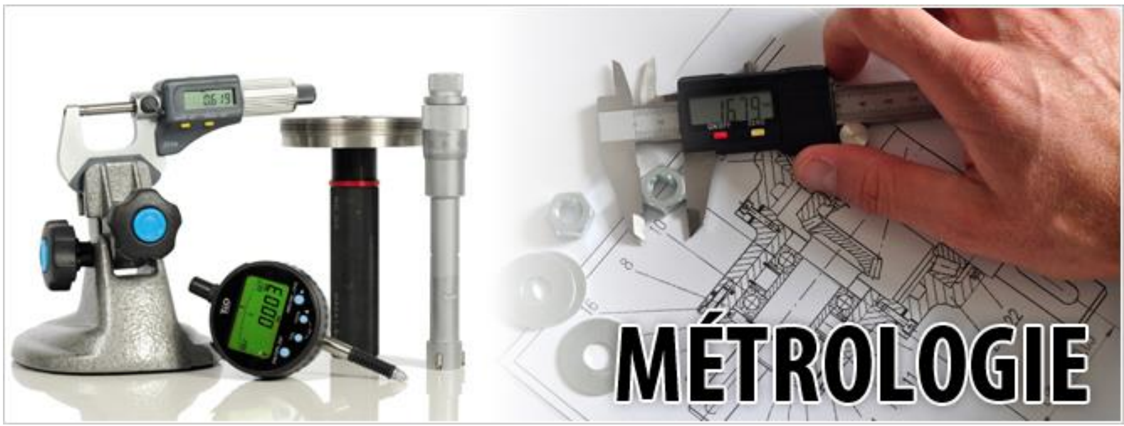
La **précision c'est l'erreur absolue générée lorsque l'on effectue une mesure**. Elle résulte des caractéristiques de justesse, de répétabilité et de résolution de l'instrument de mesure.



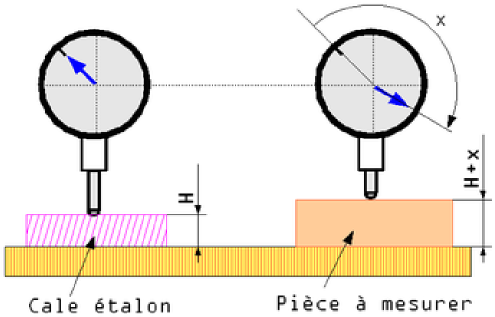
3. Méthodes de mesurage et de contrôle

3.1. Différence entre mesurage et contrôle

La métrologie est le domaine des connaissances relatives aux **mesurages**. Elle définit l'opération ou l'ensemble d'opérations permettant de définir **avec précision la ou les valeurs des grandeurs à mesurer.**



Le **mesurage** est l'ensemble des opérations ayant pour but de déterminer la **valeur d'une grandeur.**
Le mesurage peut être **direct** *(ex : pied à coulisse, micromètre)* ou **indirect** *(ex : comparateur)*



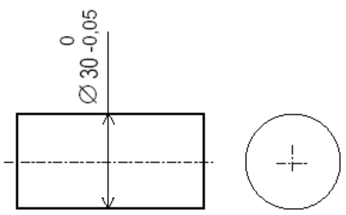
Le **contrôle** est l'action d'examiner, d'essayer, de passer au calibre une ou plusieurs caractéristiques d'un produit **et de les comparer aux exigences spécifiées** (dessin de définition) en vue d'établir leur conformité. Ces opérations permettent de déterminer si la valeur d'une grandeur se trouve bien entre les limites de tolérance qui lui sont imposées **sans en connaître la valeur exacte.**

Ex : calibre à machoire, attribut…

3.2. Modes de contrôle associés aux spécifications dimensionnelles

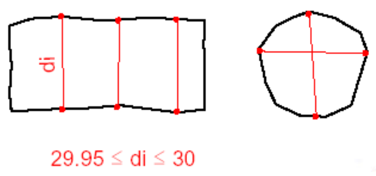
- Les **spécifications dimensionnelles** portent sur des grandeurs de type **longueur ou angle**.
- Une **tolérance linéaire limite uniquement les dimensions locales réelles** (distances entre deux points) d'un élément simple (ex : $\varnothing 38^{+-0.05}$)

*Une pièce sera **conforme si la valeur prise par les dimensions locales se trouve à l'intérieur d'un intervalle défini par les tolérances.***



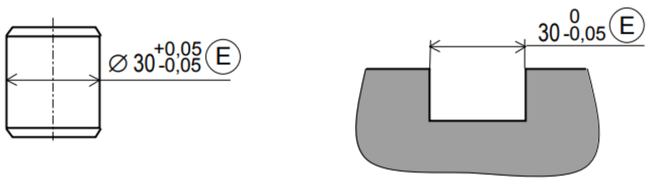
- pieds à coulisse de 0 à 1 000
- micromètres de 0 à 300
- alésomètres de 0 à 150
- jeux de cales étalons
- jeux de calibres de filetage et alésage H7

Réponse attendue au concours : toutes les dimensions locales doivent êtres comprises entre 29.95 et 30.

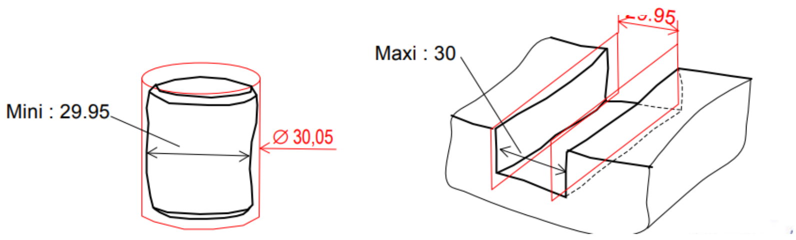


Rappel avec une exigence d'enveloppe (E)

Une exigence d'enveloppe peut être ajoutée à la suite d'une tolérance linéaire :



Elle signifie, qu'en plus des conditions sur les dimensions locales réelles, la **surface ne doit pas dépasser une enveloppe de forme parfaite à la dimension au maximum de matière** de l'élément côté :



Cette cotation certes plus restrictive, ne sera pas suffisante pour des pièces où les défauts géométriques de forme, position et orientation doivent êtres limités…on passera à une **cotation GPS.**

3.3. Modes de contrôle associés aux spécifications géométriques

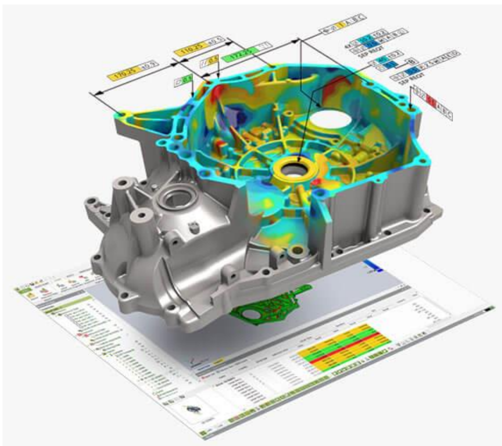
Les **tolérances géométriques** limitent l'écart de l'élément réel par rapport à **sa forme, son orientation ou sa position** théoriquement exacte.

La pièce sera conforme si **l'élément tolérancé se trouve à l'intérieur de la zone de tolérance**.

Mesure carter cylindres à la MMT

Métrologie tridimensionnelle, nuages de points

Dans cette hypothèse on ne parle plus de mesurage direct ou indirect. On **extrait du réel des ensembles de points** qui sont les éléments de référence et les éléments tolérancés.

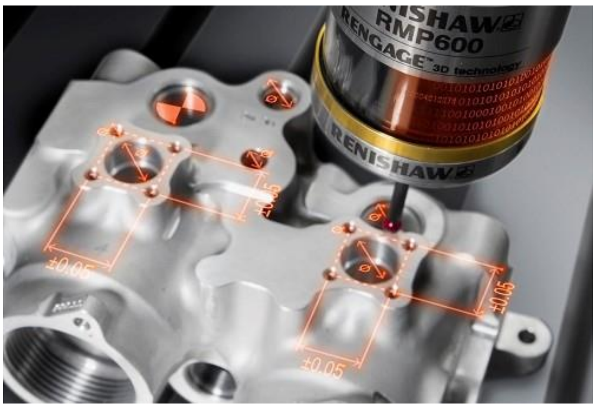


Des **opérations (d'association, de construction, de collection)** réalisées par le **logiciel de calcul** associé à la Machine à Mesurer Tridimensionnelle (MMT) déterminent la référence spécifiée, la position ou l'orientation de la zone de tolérance et par conséquent les valeurs des défauts géométriques.

Constituées en général de trois axes de mesure montés en série, **un palpeur** est fixé à l'extrémité du dernier axe. Il est alors possible de relever les trois déplacements du palpeur et par suite de déduire après calcul les trois coordonnées x, y, z du point de contact entre le palpeur et la surface à mesurer.

4. Les opérations sur les éléments géométriques

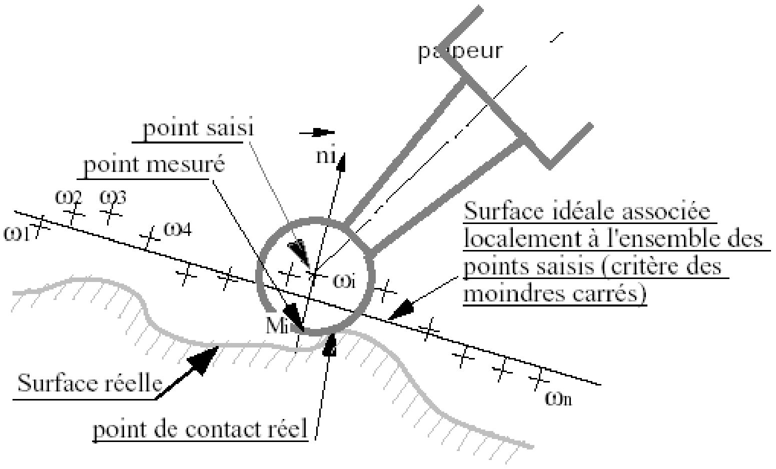
4.1. L'opération d'extraction



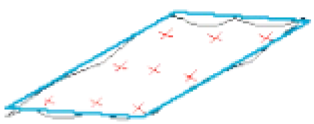
L'opération d'extraction permet d'identifier des points spécifiques à partir d'un élément réel **par palpage**. On obtient un nombre fini de points extraits. Cet **ensemble fini de points est qualifié d'élément géométrique extrait.**

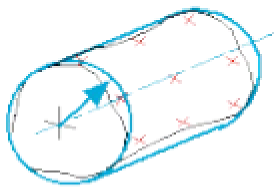
Principe de l'opération d'extraction

Le point de contact réel entre le palpeur et la surface mesurée étant inconnu, on lui substitue un point de contact estimé ou **point mesuré**. Ce dernier est calculé à partir des coordonnées du point saisi (centre du palpeur), dépendant du sens d'accostage et du rayon du palpeur (connu par la MMT). Pour cela on fait l'hypothèse que le point de contact recherché est à l'intersection de la sphère de palpage et de la normale à la surface passant par le point saisi.



Puis, on réalise l'**association d'une surface nominale** passant **au mieux des points saisis** (suivant le **critère des moindres carrés**). Ce nuage de points représente le nuage de points réels décalés du rayon. Ce décalage sera corrigé par le logiciel.





4.2. L'opération d'association

L'association d'un élément géométrique parfait à un ensemble de points extraits est l'un des problèmes fondamentaux de la mesure tridimensionnelle. En effet cette opération d'association permet de **donner suivant différents critères une représentation simplifiée de la géométrie réelle de la pièce** (cf référence spécifiée = associée en GPS).

On peut citer cinq critères d'optimisation principaux :

- Le **critère de Gauss** ou **des moindres carrés** où la somme des carrés entre les points mesurés et l'élément géométrique associé doit être minimale.

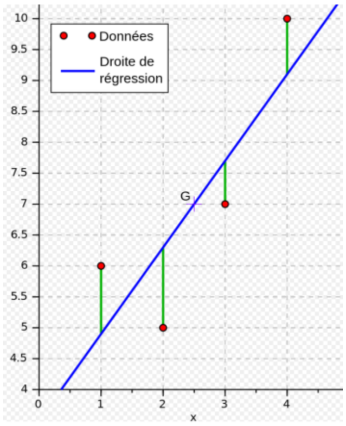
- Le **critère de Tchebychev ou du minimax** où la plus grande des plus courtes distances entre les points mesurés et l'élément géométrique associé, doit être minimale.

- Le **critère de tangence** où l'élément géométrique associé doit être situé d'un même côté de l'ensemble des points mesurés, et être en contact avec au moins un point mesuré. Le coté choisi est en général celui du coté libre de la matière.

- Le **critère du minimum circonscrit** où l'élément géométrique associé (cercle, sphère, cylindre et tore) doit avoir son rayon le plus petit possible, et être situé à l'extérieur de l'ensemble des points mesurés.

- Le **critère du maximum inscrit** où l'élément géométrique associé (cercle, sphère, cylindre et tore) doit avoir son rayon le plus grand possible, et être situé à l'intérieur de l'ensemble des points mesurés.

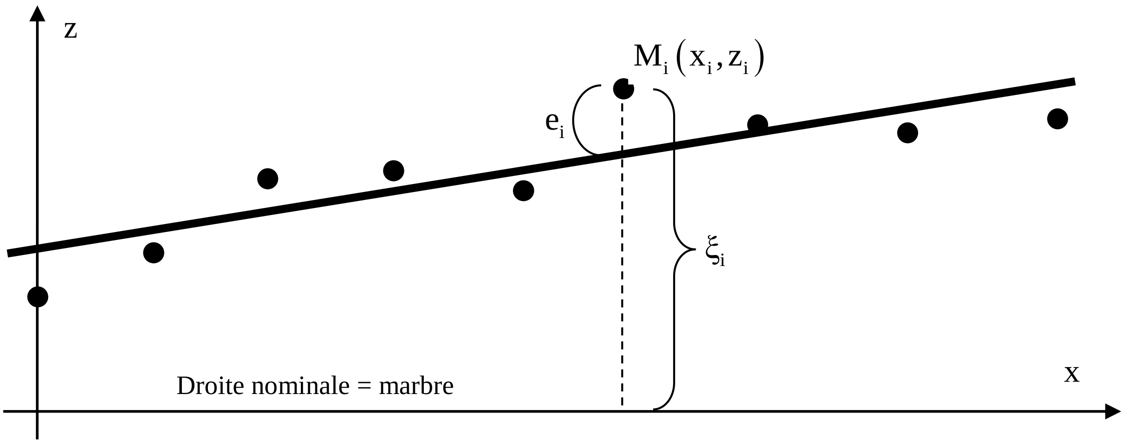
4.3. Les moindres carrés



Le critère d'association des moindres carrés consiste à définir l'élément géométrique parfait qui **minimise la somme des écarts aux carrés avec les points relevés**. C'est un critère statistique.

Droite des moindres carrés

C'est la droite que l'on cherche à associer à l'ensemble de points relevés lors d'une opération de **contrôle de rectitude.**



En chaque point M_i (x_i, z_i), la distance point / référentiel nominal de la MMT (marbre) est exprimée par :

$$\xi_i = z_i - z_0$$

La droite des moindres carrés a pour équation : $z = \beta x + w$

On peut alors exprimer l'écart e_i (appelé résidu) entre chaque point et la droite des moindres carrés :

$$e_i = \xi_i - (\beta x_i + w)$$

La fonction S définie la somme des écarts aux carrés :

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} e_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\xi_i - \beta x_i - w\right)^2$$

La somme S est minimale si les dérivées partielles sont nulles : $\dfrac{\partial S}{\partial \beta} = \dfrac{\partial S}{\partial w} = 0$

Calcul des dérivées partielles :

- $$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{i=n} (\xi_i - \beta x_i - w)^2}{\partial \beta} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{i=n} (-\beta x_i)^2}{\partial \beta} + \frac{\partial \sum_{i=1}^{i=n} (-2\beta x_i \xi_i)}{\partial \beta} + \frac{\partial \sum_{i=1}^{i=n} (2\beta x_i w)}{\partial \beta}$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{i=n} x_i \left(\sum_{i=1}^{i=n} \xi_i - \beta \sum_{i=1}^{i=n} xi - w \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 + w \sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \xi_i}$$

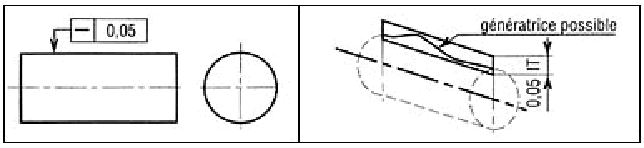
- $$\frac{\partial S}{\partial w} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{i=n} (\xi_i - \beta x_i - w)^2}{\partial w} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{i=n} (-w)^2}{\partial w} + \frac{\partial \sum_{i=1}^{i=n} (-2\xi_i w)}{\partial w} + \frac{\partial \sum_{i=1}^{i=n} (2\beta x_i w)}{\partial w}$$

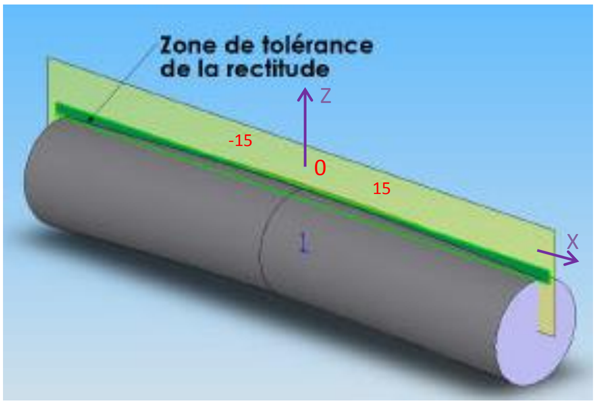
$$= -2 \left(-nw + \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i - \beta \sum_{i=1}^{i=n} xi \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta \sum_{i=1}^{i=n} x_i + n \cdot w = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i}$$

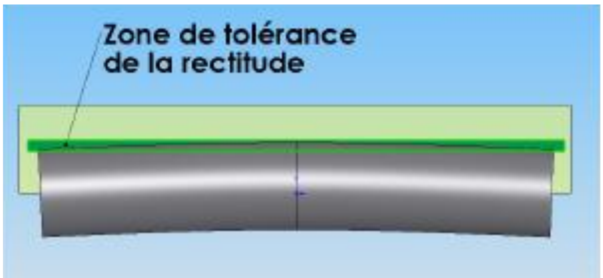
Il suffit de résoudre ce système de deux équations à deux inconnues pour déterminer β et w, puis déterminer les valeurs e_i des écarts.

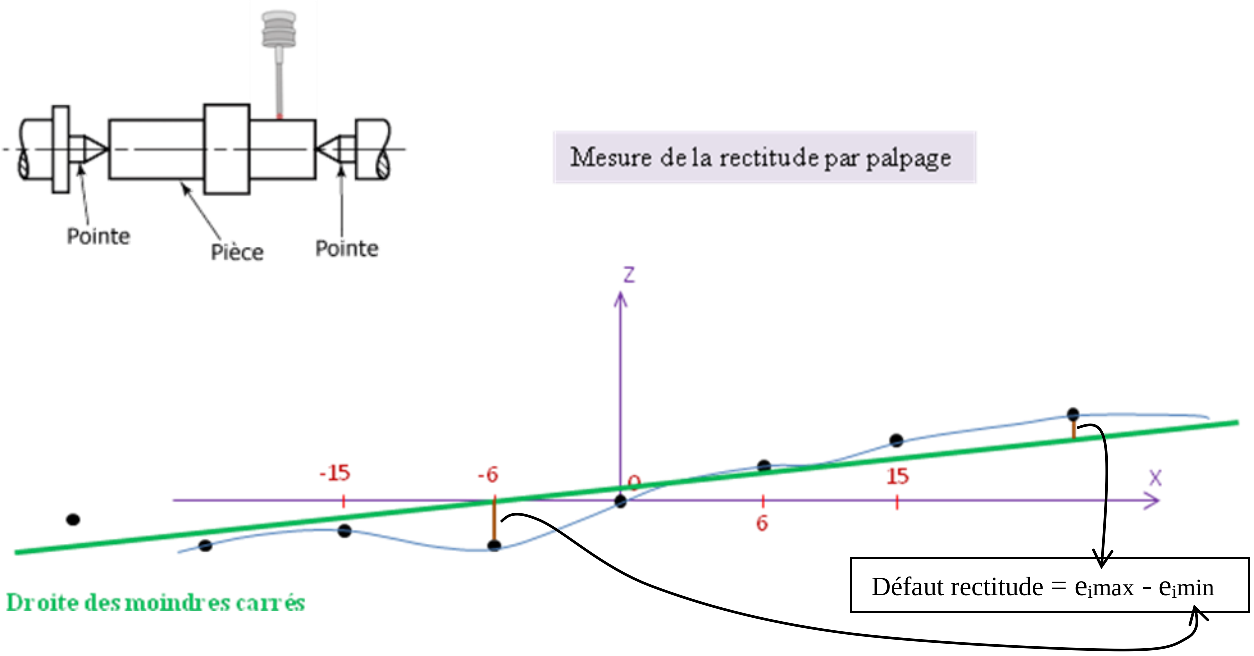
On obtient : $$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i \xi_i}{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2} \quad \text{et} \quad w = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \xi_i}{n}$$

Protocole de mesurage d'une **spécification de rectitude** :









Calcul du défaut de rectitude à l'aide d'un fichier Excel :

RECTITUDE

Feuille de relevés

xi	-24	-21	-18	-15	-12	-9	-6	-3	*0*	3	6	9	12	15	18	21	24
xi²	576	441	324	225	144	81	36	9	*0*	9	36	81	144	225	324	441	576
εi	**-15**	**-8**	**-14**	**-4**	**-11**	**-4**	**-5**	**-1**	*0*	**1**	**5**	**7**	**9**	**10**	**12**	**14**	**16**
xi.εi	360	168	252	60	132	36	30	3	*0*	3	30	63	108	150	216	294	384
ei	-0,789	4,341	-3,529	4,600	-4,270	0,860	-2,010	0,120	-0,750	-1,620	0,510	0,640	0,770	-0,100	0,029	0,159	0,289

β =	**0,623**	
w =	**0,750**	
ei Maxi =	**4,600**	µm
ei mini =	**-4,270**	µm
Défaut de rectitude =	**8,870**	µm

β = (Σ xi . εi) / (Σ xi²)

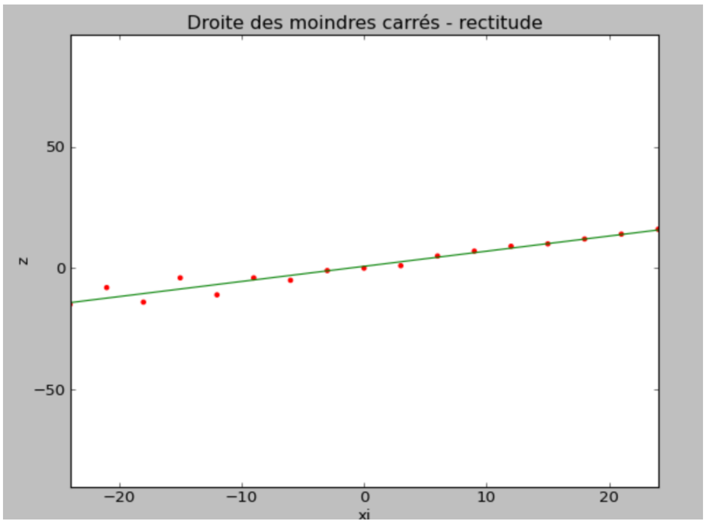
w = (Σ εi) / n

ei = εi - βxi - w

Hypothèse justifiant la méthode : le nombre de points palpés est identique de part et d'autre du point milieu (point d'abscisse xi=0)

Calcul du défaut de rectitude à l'aide d'un programme Python :

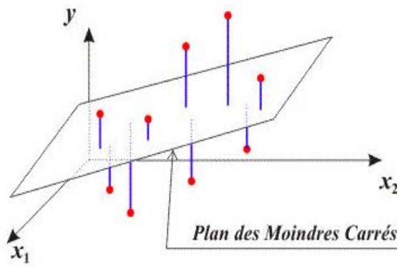
```python
import matplotlib.pyplot as plt
from math import *


# Saisie des xi et epsi
xi=[-24,-21,-18,-15,-12,-9,-6,-3,0,3,6,9,12,15,18,21,24]
epsi=[-15,-8,-14,-4,-11,-4,-5,-1,0,1,5,7,9,10,12,14,16]

n=len(epsi)

#Coefficients des moindres carrés
numb=0
denob=0
numw=0

for i in range (n):
    numb=numb+(xi[i]*epsi[i])
    denob=denob+(xi[i]**2)
    numw=numw+(epsi[i])
beta=numb/denob
w=numw/(n-1)

print("Beta= ",beta)
print("w= ",w)
# Calcul des écarts à la droite des moindres carrés
ei=[]
for i in range(n):
    ei.append(epsi[i]-beta*xi[i]-w)

# Tracé des courbes
plt.figure()
plt.xlabel('xi'); plt.ylabel('z')
plt.xlim(min(xi),max(xi)); plt.ylim(min(epsi)*6,max(epsi)*6)
plt.title("Droite des moindres carrés - rectitude")
plt.scatter(xi, epsi, color = "red", marker = "o", s = 10)

z=[]
for i in range(n):
    z.append(beta*xi[i]+w)

plt.plot(xi, z, color = "g")

# Défaut de rectitude
d=round((max(ei)-min(ei)),2)
print("Le défaut de rectitude est de: ",d,"microns")

plt.savefig("rectitude moindres carrés.pdf",format="pdf")
plt.show()
```




```
Python 3.3.2 (v3.3.2:d047928ae3f6, May 16 2013, 00:06:53
D64)] on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more info
>>> ================================ RESTART ===========
>>>
Beta=  0.6233660130718954
w=  0.75
Le défaut de rectitude est de:  8.87 microns
```

Plan des moindres carrés

C'est le plan que l'on cherche à associer à l'ensemble de points relevés lors d'une opération d'extraction ou de **contrôle de la planéité.**



Le plan des moindres carrés a pour équation :

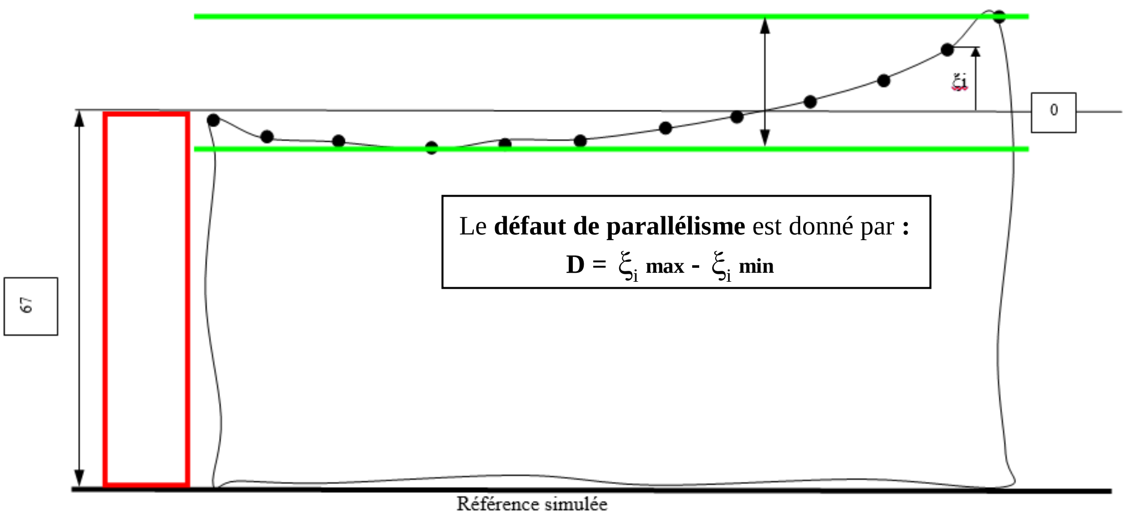
$$z = \alpha y + \beta x + w$$

Par un même raisonnement que pour la droite des moindres carrés, il faut résoudre ce système de trois équations à trois inconnues pour déterminer, α β et w, puis déterminer les valeurs e_i des écarts.

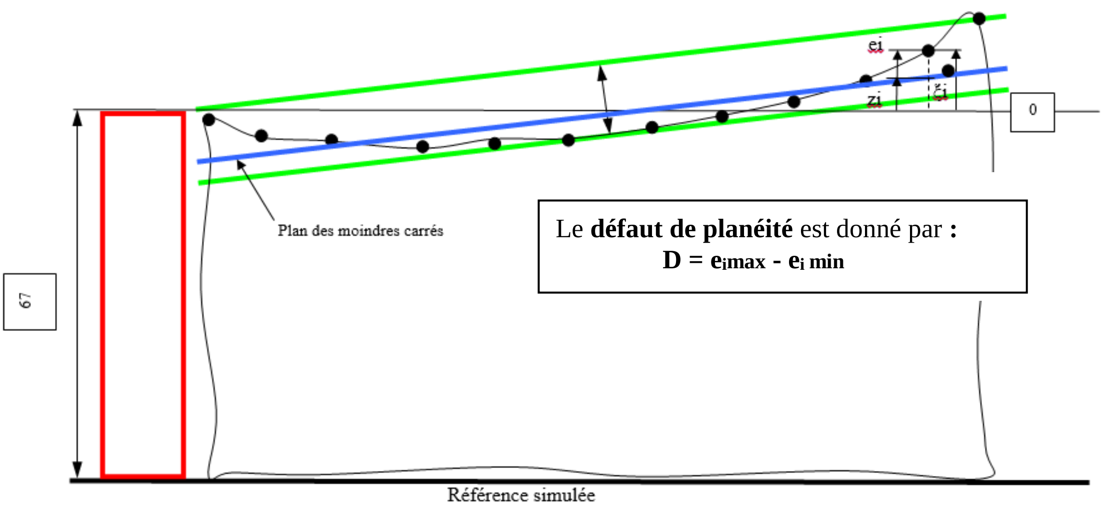
$$\left\{\begin{array}{l}
\alpha\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2 + \beta\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i + w\sum_{i=1}^{i=n} y_i = \sum_{i=1}^{i=n} y_i \xi_i \\
\alpha\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i + \beta\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 + w\sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \xi_i \\
\alpha\sum_{i=1}^{i=n} y_i + \beta\sum_{i=1}^{i=n} x_i + n \cdot w = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i
\end{array}\right.$$

Les défauts de planéité et de parallélisme

Exemple du parallélisme :



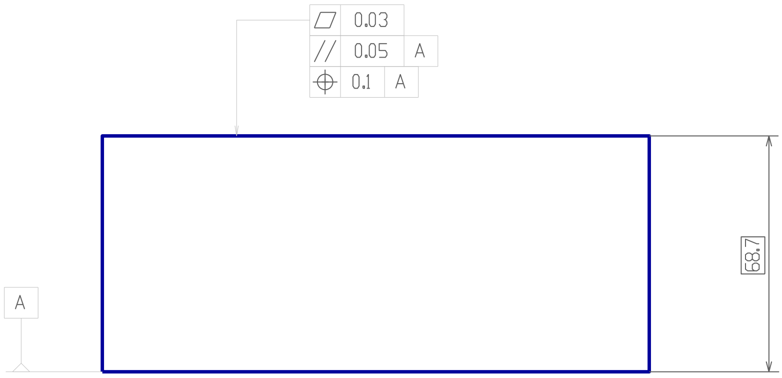
Exemple de la planéité :

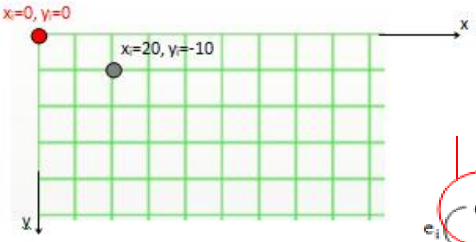


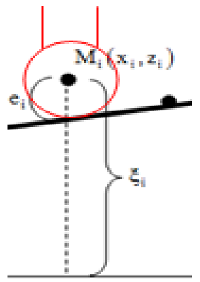
Balançage de la pièce obligatoire pour **annuler défaut parallélisme**

Exemple de calcul des défauts sur Excel :

La pièce a contrôler est la suivante :







DETERMINATION DE LA VALEUR DES DEFAUTS											
Xi et Yi sont les coordonnées d'un point Mi											
ξi est la distance entre le point Mi et le plan											
défini à partir de la référence A et de la valeur théorique exacte											
α, β et w sont les coefficients de l'équation du plan des moindres carrés : z = αy + βx + w											
	Xi	Yi	ξi	Xi²	Yi²	ξi²	XiYi	Yiξi	Xiξi	Zi	kXi-Zi
M1	0	0	0,04	0	0	0,0016	0	0	0	-0,0056	**0,04558**
M2	20	0	-0,07	400	0	0,0049	0	0	-1,4	-0,1159	**0,04595**
M3	40	0	-0,18	1600	0	0,0324	0	0	-7,2	-0,2263	**0,04631**
M4	60	0	-0,29	3600	0	0,0841	0	0	-17,4	-0,3367	**0,04667**
M5	80	0	-0,395	6400	0	0,156025	0	0	-31,6	-0,447	**0,05204**
M6	0	20	-0,01	0	400	0,0001	0	-0,2	0	0,02045	**-0,03045**
M7	20	20	-0,12	400	400	0,0144	400	-2,4	-2,4	-0,0899	**-0,03009**
M8	40	20	-0,23	1600	400	0,0529	800	-4,6	-9,2	-0,2003	**-0,02973**
M9	60	20	-0,34	3600	400	0,1156	1200	-6,8	-20,4	-0,3106	**-0,02936**
M10	80	20	-0,45	6400	400	0,2025	1600	-9	-36	-0,421	**-0,029**
M11	0	40	-0,01	0	1600	0,0001	0	-0,4	0	0,04649	**-0,05649**
M12	20	40	-0,13	400	1600	0,0169	800	-5,2	-2,6	-0,0639	**-0,06613**
M13	40	40	-0,24	1600	1600	0,0576	1600	-9,6	-9,6	-0,1742	**-0,06576**
M14	60	40	-0,35	3600	1600	0,1225	2400	-14	-21	-0,2846	**-0,0654**
M15	80	40	-0,46	6400	1600	0,2116	3200	-18,4	-36,8	-0,395	**-0,06504**
M16	0	60	0,02	0	3600	0,0004	0	1,2	0	0,07253	**-0,05253**
M17	20	60	-0,08	400	3600	0,0064	1200	-4,8	-1,6	-0,0378	**-0,04216**
M18	40	60	0,19	1600	3600	0,0361	2400	11,4	7,6	-0,1482	**0,3382**
M19	60	60	-0,31	3600	3600	0,0961	3600	-18,6	-18,6	-0,2586	**-0,05144**
M20	80	60	-0,42	6400	3600	0,1764	4800	-25,2	-33,6	-0,3689	**-0,05107**
M21	0	80	0,12	0	6400	0,0144	0	9,6	0	0,09856	**0,02144**
M22	20	80	0	400	6400	0	1600	0	0	-0,0118	**0,0118**
M23	40	80	-0,1	1600	6400	0,01	3200	-8	-4	-0,1222	**0,02216**
M24	60	80	-0,22	3600	6400	0,0484	4800	-17,6	-13,2	-0,2325	**0,01253**
M25	80	80	-0,32	6400	6400	0,1024	6400	-25,6	-25,6	-0,3429	**0,02289**
M26				0	0	0	0	0	0		
M27				0	0	0	0	0	0		
M28				0	0	0	0	0	0		
M29				0	0	0	0	0	0		
M30				0	0	0	0	0	0		
M31				0	0	0	0	0	0		
M32				0	0	0	0	0	0		

Σ Xi	Σ Yi	Σ ξi	Σ Xi²	Σ Yi²	Σ ξi²	Σ XiYi	Σ Yiξi	Σ Xiξi
1000	1000	-4,395	60000	60000	1,563825	40000	-148,2	-284,6

α ΣYi² + β ΣXiYi + w ΣYi - ΣξiYi = 0	1,14E-10
α ΣXiYi + β ΣXi² + wΣXi - ΣξiXi = 0	3,92E-12
α ΣYi + β ΣXi + nw - Σξi = 0	2,36E-12

nbre de points relevés n :	32

α	0
β	-0
w	-0

Valeur du défaut de planéité	**0,4043**
Valeur du défaut de parallélisme	**0,65**
Valeur du défaut de position	**0,46**

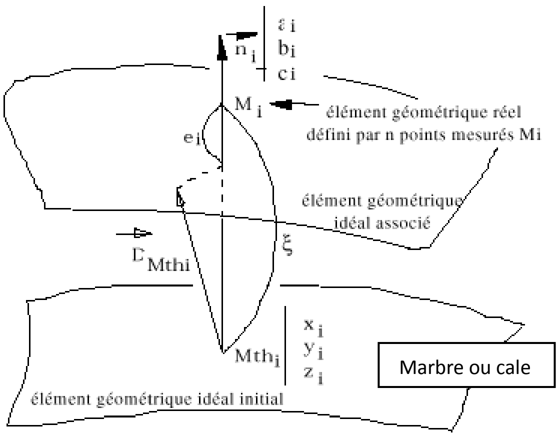
5. Approche par le torseur des petits déplacements

Nous avons vu que l'on mesure **l'écart entre un élément géométrique idéal** (ex : marbre ou cale étalon) **et l'élément géométrique réel extrait.** Ceci permet de vérifier des spécifications géométriques GPS.

- ✓ L'élément géométrique idéal ne peut pas être défini par une équation. Il est donc défini par les coordonnées (x_i, y_i, z_i) d'un certain nombre de points théoriques Mth_i de la surface idéale. Le palpeur pour cela vient palper quelques points sur le marbre pour définir cette surface idéale ou on fait le zéro du comparateur dessus.

- ✓ L'élément géométrique réel est obtenu par **extraction d'un ensemble de points M_i**, mesurés suivant les normales n_i par **palpage** de la surface réelle (ξ_i).

- ✓ ξ_i est le résultat de la **mesure**. Cette valeur correspond à la distance entre le point Mth_i et le point M_i suivant la normale au point Mth_i. Chaque point M_i est obtenu par un **<u>petit déplacement</u>** ξ_i



- ✓ Mode de contrôle utilisé: MMT $\rightarrow$ palpe les points M_i $\rightarrow$ nuage de coordonnées ξ_i mesurées suivant n_i

<u>Remarque :</u>

On peut difficilement faire passer l'élément géométrique idéal associé par tous les points palpés, c'est-à-dire que tout point Mth_i ne coïncide pas nécessairement en M_i après le petit déplacement. Soit **« e_i » cet écart.**

D'où l'expression entre chaque point M_i palpé et l'élément géométrique associé:

Désignons par :

l'expression au point A du torseur des petits déplacements qui permet de faire passer l'élément géométrique idéal de sa position initiale à sa position optimisée devenant ainsi l'élément géométrique idéal associé.

A étant un point de référence, on peut écrire :

L'équation (l) devient :

On utilise le critère des moindres carrés (ou critère de Gauss) pour positionner l'élément géométrique idéal associé tel qu'il minimise la somme des écarts « e_i » au carré.

On forme donc la fonction W constituée par la somme des « e_i^2 » soit :

Cette fonction W atteint un minimum lorsque les dérivées partielles de la fonction W sont égales à zéro. Ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial W}{\partial d\alpha_x} = \frac{\partial W}{\partial d\alpha_y} = \frac{\partial W}{\partial d\alpha_z} = \frac{\partial W}{\partial dA_x} = \frac{\partial W}{\partial dA_y} = \frac{\partial W}{\partial dA_z} = 0$$

La résolution de ce système d'équations donne les éléments de réduction du torseur des petits déplacements exprimé au point A : $\left(d\alpha_x, d\alpha_y, d\alpha_z, dAx, dAy, dAz\right)$

Ces valeurs permettent alors de calculer pour chaque point, l'écart optimisé par la formule :

L'idée est à partir des points palpés de construire le plan des moindres carrés.