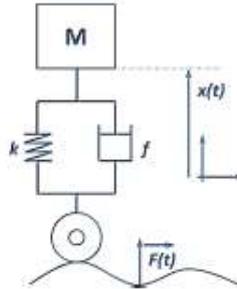


Cycle 1: Analyser, modéliser et étudier le comportement des Systèmes Linéaires Continus et Invariants

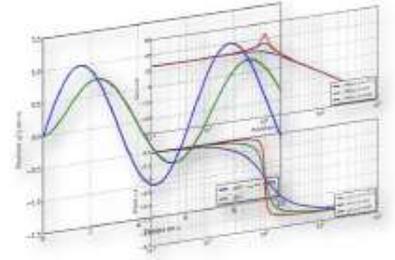
Chapitre 2 – Réponses harmoniques des systèmes linéaires



Amortisseur d'un véhicule automobile



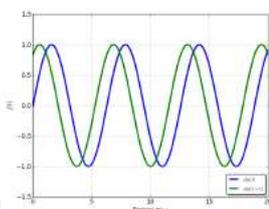
Schématisme du mécanisme



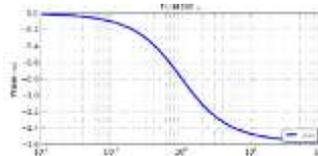
Réponses harmoniques

Problématique

Comment réagissent les systèmes linéaires à une entrée sinusoïdale ? Quel est le comportement dynamique des systèmes du 1^{er} et 2nd ordre ? Comment traiter les systèmes non linéaires ?



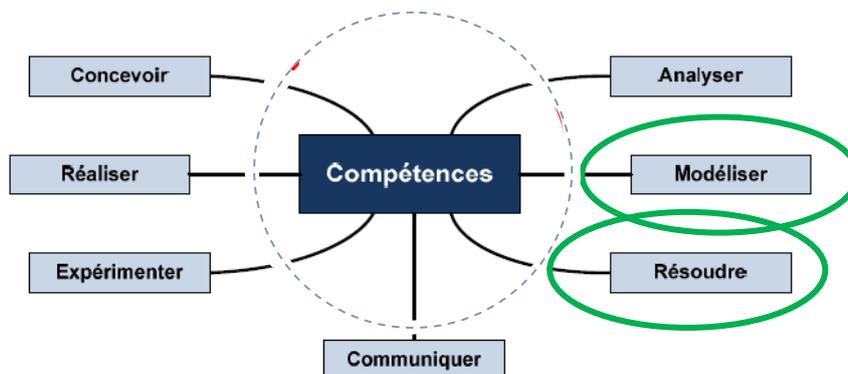
Sinus déphasés



Savoir

B. Modéliser

- Déterminer les performances d'un système asservi
- Tracer une réponse fréquentielle
- Interpréter une réponse fréquentielle dans les plans de Bode et Black en vue de l'étude de stabilité.





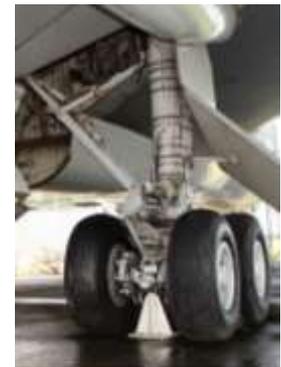
SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

1. Objectif de l'analyse fréquentielle

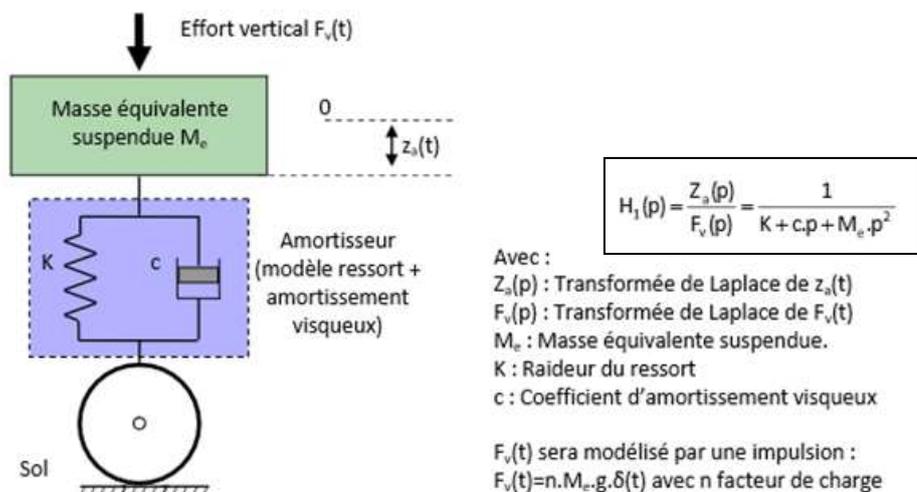
L'analyse **fréquentielle ou harmonique** d'un système correspond à un fonctionnement en **régime permanent** pour lequel le signal d'entrée est représenté par une **fonction sinusoïdale** du temps. Si le système est linéaire, on montrera que la sortie est également représentée par une fonction sinusoïdale du temps de **même fréquence mais déphasée** par rapport au signal d'entrée.

Exemple amortisseur B787

L'amortisseur de train d'atterrissage d'avion est un **système dynamique** qui doit principalement amortir l'impact de l'avion à l'atterrissage mais qui doit aussi filtrer les sollicitations (pour les passagers, les équipements, ...) imposées par les **irrégularités du sol** lorsque l'avion est en phase de roulage sur la piste.



La modélisation simplifiée de l'avion avec son amortisseur dans la phase de vie « atterrissage » sur la piste est donnée sur la figure ci-dessous : $z_a(t) = z_{a0} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ correspond à la modélisation du signal d'entrée (z_{a0} étant l'amplitude des irrégularités de la piste et ω la vitesse de rotation de la roue de l'avion). A partir de cette modélisation, on obtient la fonction de transfert qui lie la hauteur $z_a(t)$ de l'avion à l'effort de l'impact $F_v(t)$ au moment de l'impact :



Extrait de cahier des charges

Exigences	Critères	Niveaux
1.4. Le système doit absorber l'énergie cinétique verticale de l'avion	→ Facteur de charge n $n = \frac{F_v}{M_e \cdot g}$ → Course de l'atterrisseur	→ $n < 1,2$ pour $M_e = 100000$ kg → $z_a < 500$ mm

L'idée de ce chapitre est d'analyser la réponse fréquentielle (harmonique) des systèmes.



 SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

2. Caractérisation d'un signal sinusoïdal

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme suivante :

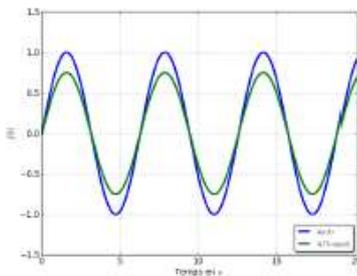
$$f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

et on note :

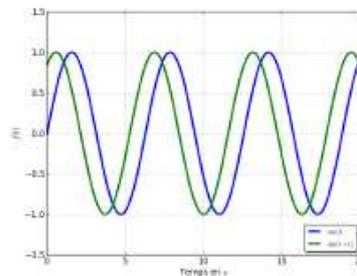
- A : l'amplitude de la sinusoïde ;
- ω : la pulsation en rad/s ;
- φ : la phase à l'origine en rad .

On a par ailleurs :

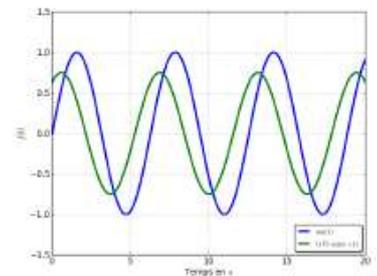
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$: la période de la sinusoïde en s ;
- $f = \frac{1}{T}$: fréquence de la sinusoïde en Hz .



Sinus amplifiés



Sinus déphasés



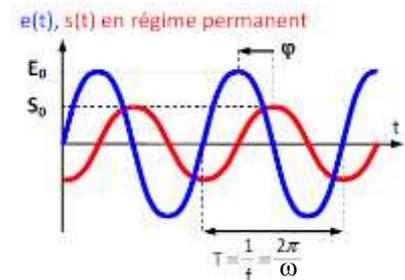
Sinus amplifiés et déphasés

3. Etude fréquentielle - Réponse harmonique

Soit un Système Linéaire Continu et Invariant d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ régi par une équation différentielle à coefficients constants du type :

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot e(t)$$

Lorsque l'entrée d'un SLCI est un signal sinusoïdal du type $e(t) = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$, il faut chercher une sortie en régime permanent sous la forme $s(t) = S_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$.



On peut caractériser l'effet du système uniquement avec deux grandeurs qui sont :

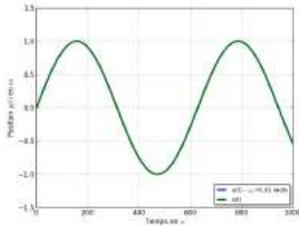
- le **rapport des amplitudes** S_0/E_0 , appelé **gain** du système et qui représente l'amplification du système,
- le **déphasage** φ appelé phase et qui représente le décalage de $s(t)$ par rapport à $e(t)$.

Les courbes $e(t)$ et $s(t)$ dessinées **ne sont valables que pour la pulsation ω du signal d'entrée**. L'objet d'une étude fréquentielle d'un système est d'étudier l'évolution du gain et de la phase, en fonction de la **variation de la valeur de la pulsation ω** du signal d'entrée, sur la réponse harmonique du système.

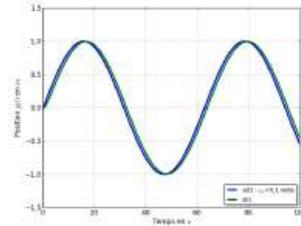


SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

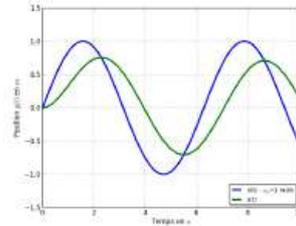
On donne les réponses temporelles pour plusieurs valeurs de la pulsation du signal d'entrée (*attention : les échelles des abscisses ne sont pas les mêmes sur chacune des figures*).



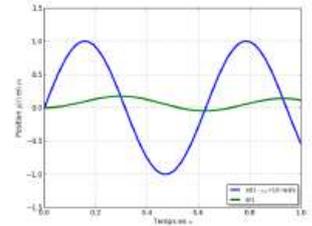
$\omega_0 = 0,01 \text{ rad/s} - T = 200\pi \text{ s}$



$\omega_0 = 0,1 \text{ rad/s} - T = 20\pi \text{ s}$



$\omega_0 = 1 \text{ rad/s} - T = 2\pi \text{ s}$



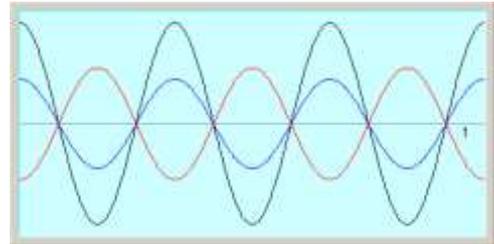
$\omega_0 = 10 \text{ rad/s} - T = 0,2\pi \text{ s}$

On constate que **quand la pulsation du signal augmente**, on observe **un déphasage** entre le signal d'entrée et le signal de sortie ainsi qu'une **atténuation** du signal de sortie.

3.1. Notion de retard, avance ou opposition de phase

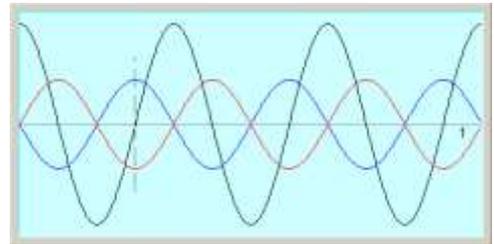
Sur l'exemple ci-contre, si l'onde noire=entrée alors :

- Onde rouge = *opposition de phase*
- Onde bleue = *en phase*



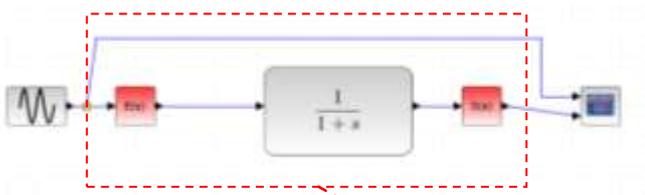
Sur l'autre exemple ci-contre, si onde noire=entrée alors :

- Onde rouge = *retard de phase*
- Onde bleue = *avance de phase*



3.2. Exemple complet avec Scilab :

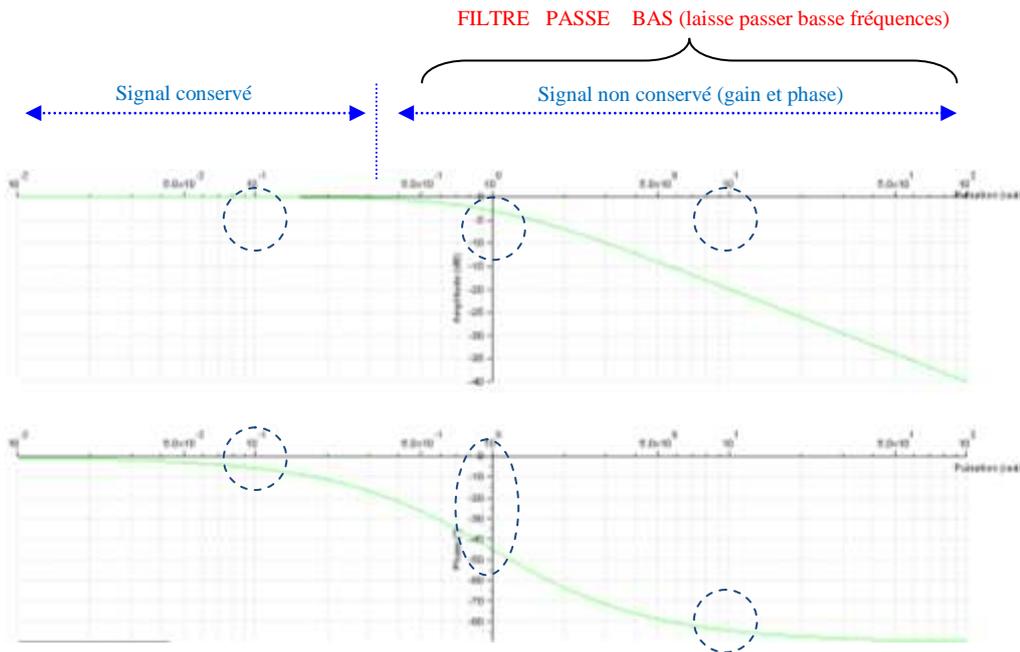
Soit la fonction de transfert ci-dessous d'un système du 1^{er} ordre. Nous avons mis une entrée sinusoidale $e(t)=1.\sin(0.1t)$



Scilab nous permet de tracer le diagramme de Bode de la FT ($S(t)/E(t)$) avec les blocs rouges. Ce diagramme **donne les différentes valeurs du Gain (rapport d'amplitude) et de la Phase (déphasage) pour toutes les valeurs de w présent entre les bornes définies [0.01-100 rad/s]**.

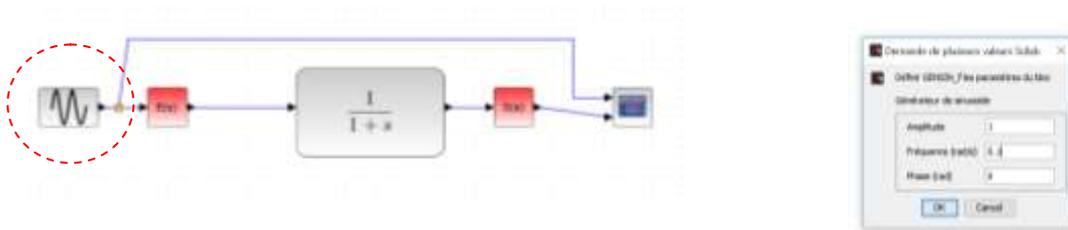


SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

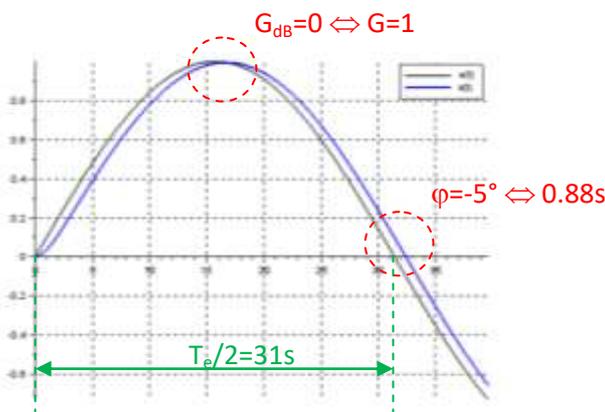


Le Bode trace le G_{dB} et φ en fonction de ω indépendamment de l'entrée !!!

Scilab nous permet ensuite d'appliquer une entrée sinusoïdale à notre système. Nous avons paramétré l'entrée $e(t)=1.\sin(0.1t)$.



Lançons la simulation pour tracer la réponse harmonique de la sortie $s(t)$. Voici la courbe obtenue :



Comme $e(t)=1.\sin(0.1t)$, on a $\omega=0.1\text{rad/s}$ et amplitude de 1. Comment cela se traduit sur la réponse harmonique ?

D'après Bode, pour $\omega=0.1$, $G_{dB}=0$, donc rapport d'amplitude (gain) vaut $10^{0/20}=1$ (**pas rapport d'amplitude**) et $\varphi=-5^\circ$, donc léger déphasage : **la sortie est en retard de $5^\circ \Leftrightarrow 0,088$ rad.**

La période de l'entrée est $T_e=2\pi/\omega_e=2\pi/0.1=62.8s$

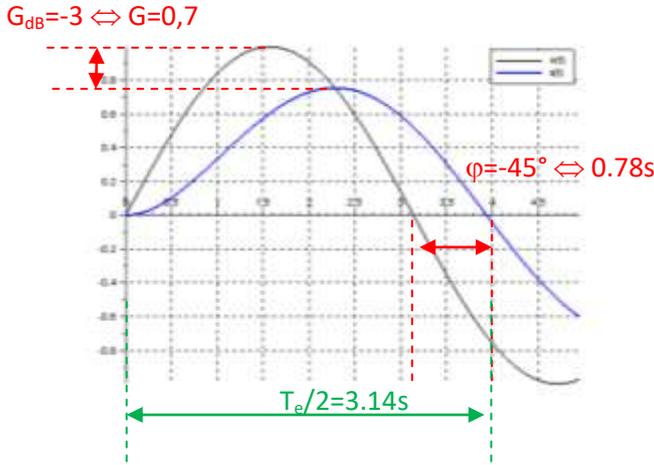
Le retard en seconde est $r=(\varphi \cdot T_e)/2\pi$ soit $r=0.88s$

La réponse harmonique est **$s(t)=\sin(0.1t-0.088)$**



SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

Si on paramètre maintenant $e(t)=1.\sin(1t)$, on obtient :



Comme $e(t)=1.\sin(1t)$, on a $\omega=1\text{rad/s}$ et amplitude de 1.
Comment cela se traduit sur la réponse harmonique ?

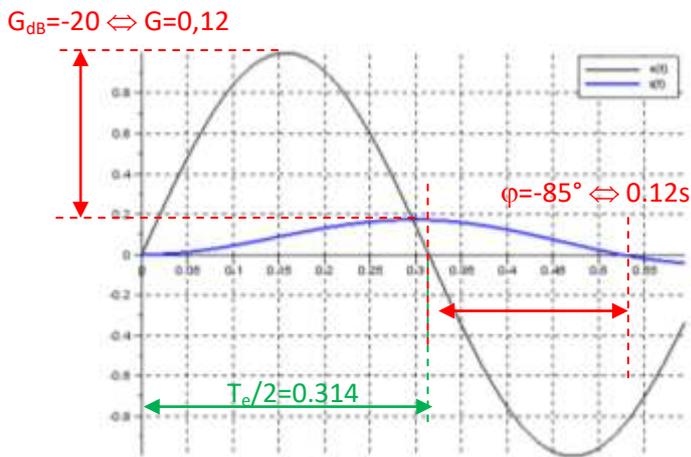
D'après Bode, pour $\omega=1$, $G_{dB}=-3$, donc rapport d'amplitude (gain) vaut $10^{-3/20}=0.7$ et $\varphi=-45^\circ$, donc déphasage : la **sortie est en retard de $45^\circ \Leftrightarrow 0.78\text{rad}$** .

La période de l'entrée est $T_e=2\pi/\omega_e=2\pi/1=6.28\text{s}$

Le retard en seconde est $r = (\varphi * T_e) / 2\pi$ soit $r=0.78\text{s}$

La réponse harmonique est : **$s(t)=0.7\sin(t-0.78)$**

Si on paramètre maintenant $e(t)=1.\sin(10t)$, on obtient :



Comme $e(t)=1.\sin(10t)$, on a $\omega=10\text{rad/s}$ et amplitude de 1.
Comment cela se traduit sur la réponse harmonique ?

D'après Bode, pour $\omega=10$, $G_{dB}=-20$, donc rapport d'amplitude (gain) vaut $10^{-20/20}=0.1$ et $\varphi=-85^\circ$, donc déphasage : la **sortie est en retard de quasi $90^\circ \Leftrightarrow 1.57\text{rad}$** .

La période de l'entrée est $T_e=2\pi/\omega_e=2\pi/10=0.628\text{s}$

Le retard en seconde est $r = (\varphi * T_e) / 2\pi$ soit $r=0.12\text{s}$

La réponse harmonique est : **$s(t)=0.1\sin(t-1.57)$**

3.3. Définitions

On appelle **fonction de transfert complexe**, la fonction obtenue en remplaçant la variable de Laplace (p) par le terme $j\omega$ (imaginaire pur).

$$H(j \cdot \omega) = \frac{S(j \cdot \omega)}{E(j \cdot \omega)}$$

Pour réaliser l'étude fréquentielle d'un système, on exploite la fonction de transfert du système $H(p)$ et, par la méthode des complexes, on utilise :

- le **gain du système** qui est égal au **module du nombre complexe $H(j\omega)$** ,
- la **phase du système φ** qui est égale à l'**argument du nombre complexe $H(j\omega)$** .

$$\frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)|$$

$$\varphi = \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$$



 SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

Résultat

On rappelle que si $H(j\omega) = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}$, alors :

– on appelle $A(\omega) = |H(j\omega)|$ le module de H (ou le gain de H) et on a :

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

– on appelle $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$ l'argument de H (ou la phase de H) et on a :

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{y_1}{x_1} - \arctan \frac{y_2}{x_2}$$

L'interprétation des **variations de gain et de phase en fonction de la fréquence du signal** (ou de la pulsation) est fondamentale tant en électronique qu'en automatique, c'est pourquoi le tracé graphique de ces variations est étudié à l'aide de différents diagrammes (BODE et BLACK).

Rappels mathématiques :

$$\log(a.b) = \log a + \log b \quad \log a^n = n \log a \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log_{10} 0,01 = -2 \quad \log_{10} 0,1 = -1 \quad \log_{10} 1 = 0 \quad \log_{10} 10 = 1 \quad \log_{10} 100 = 2$$

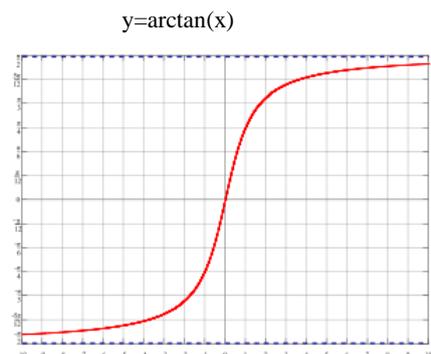
$$20 \log_{10} x = y \Rightarrow x = 10^{\frac{y}{20}}$$

Ne pas confondre \log_{10} (logarithme décimal) et \ln (logarithme népérien)

$$x = \ln y \Rightarrow y = \exp^x$$

$$\text{Soit } z = a + jb = r_1 \exp^{j\theta_1} \text{ et } z' = c + jd = r_2 \exp^{j\theta_2}$$

$$\text{Soit } z \times z' = r_1 \times r_2 \exp^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$



Arctan(1) = 45°
 Arctan(+∞) = 90°
 Arctan(-∞) = -90°



SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

4. Diagramme de BODE, lieu de transfert pour les études fréquentielles

On appelle lieu de transfert toute représentation graphique du comportement fréquentiel de $H(j\omega)$ à l'aide de diagrammes. Les diagrammes les plus connus portent le nom de leur inventeur : Bode, Nyquist, Black. L'un des plus utilisé est le diagramme de Bode.

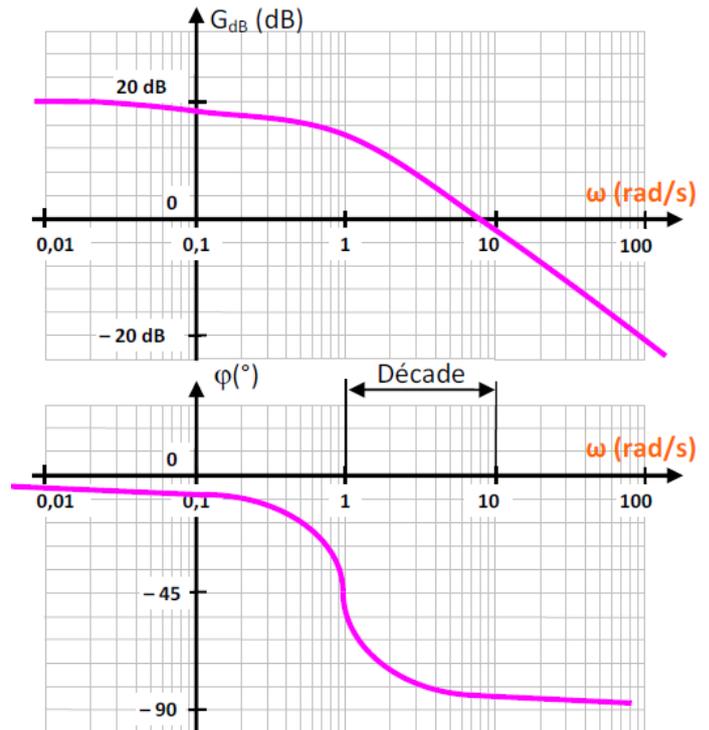
Le diagramme de Bode est constitué de deux courbes correspondant aux traces du module et la phase de $H(j\omega)$ en fonction de la fréquence (ou de la pulsation) sur une échelle **logarithmique en base 10**.

Le module $|H(j\omega)|_{dB}$, noté G_{dB} , est exprimé en décibel avec $G_{dB} = 20 \cdot \log_{10} |H(j\omega)|$

La phase φ est exprimée en général en degrés.

Les deux courbes sont tracées séparément mais sur la même feuille, l'une en dessous de l'autre, car l'interprétation des résultats nécessite toujours une étude simultanée des deux courbes.

Sur l'échelle logarithmique en base 10 il n'y a pas d'origine des abscisses. Par conséquent il n'y a jamais de 0 sur l'axe des abscisses et le tracé ne concernera qu'une bande de pulsation qu'il faudra choisir judicieusement.



L'échelle en dB permet de transformer le produit des modules en une somme. On peut donc tracer séparément les diagrammes de Bode de chaque fonction de transfert élémentaire qui compose $H(j\omega)$, puis faire la somme des modules et des arguments afin d'obtenir le diagramme de Bode final qui correspondra au comportement fréquentiel du système $H(j\omega)$.

Si $H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p)$ alors $20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log |H_1(j\omega)| + 20 \cdot \log |H_2(j\omega)|$ et $\text{Arg}(H(j\omega)) = \text{Arg}(H_1(j\omega)) + \text{Arg}(H_2(j\omega))$

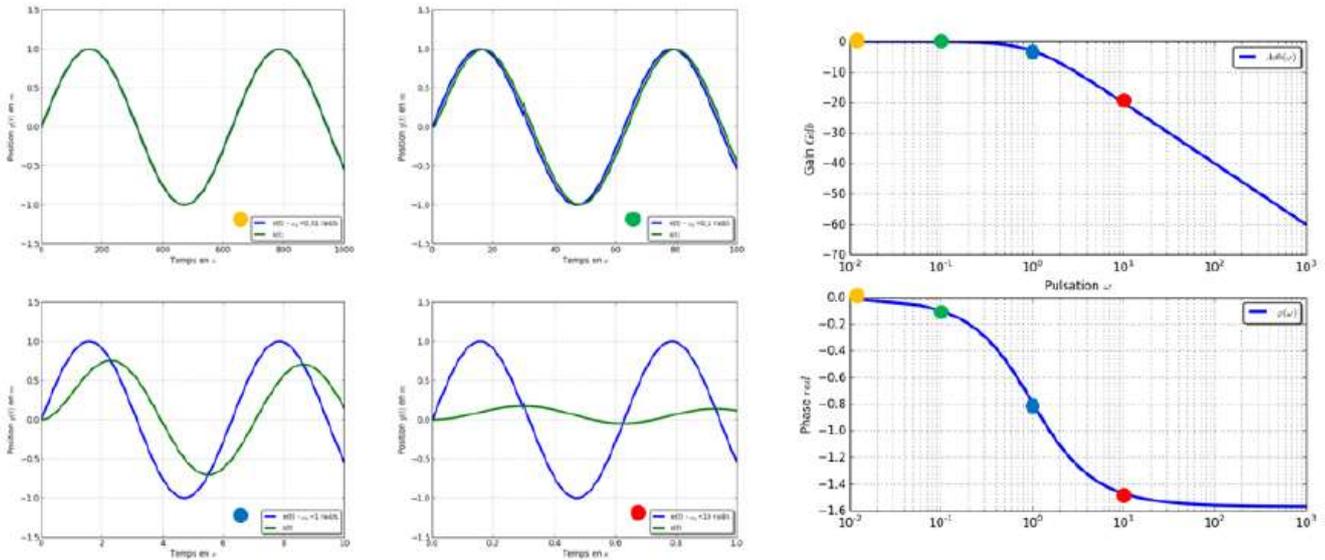
\Rightarrow ainsi pour tracer le gain et la phase d'une fonction de transfert s'exprimant sous la forme de produit de fonctions de transfert élémentaire, il suffit de **tracer les fonctions de transfert élémentaire** dans les diagrammes de Bode puis de **les sommer**.



SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

Lien entre la réponse temporelle et le diagramme de BODE :

Comme nous l'avons vu dans l'exemple avec Scilab, une réponse temporelle **pour une pulsation donnée** permet de tracer un point dans la courbe de gain et un point dans la courbe de phase.



Pulsation (rad/s)	0,01	0,1	1	10
Rapport des amplitudes	1	1	0,756	0,17
Décalage temporel (s.)	0	0	0,721	0,14
Gain (dB)	0	0	-2,43	-15,39
Déphasage (rad)	0	0	0,72	1,4

$G_{dB} = 20 \log G$

$\varphi = 2\pi * r / T_e$

Résultat

La représentation de la fonction de transfert dans les diagrammes de Bode permet d'avoir des informations sur le comportement du système.

Attention, suivant les cas, il sera nécessaire de représenter la FTBO ou la FTBF.



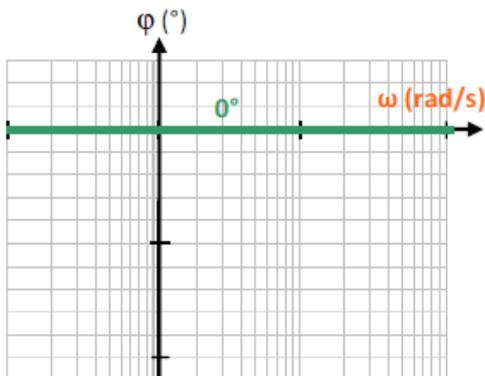
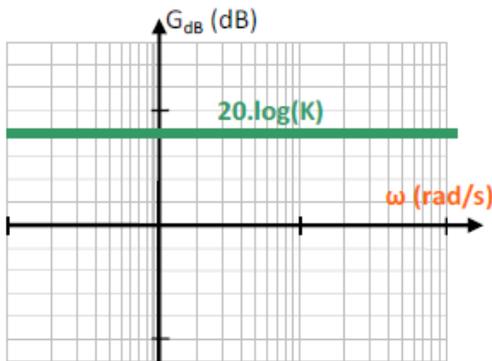
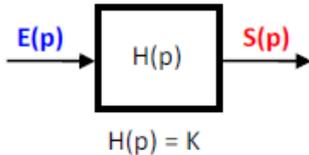
SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

5. Réponses harmoniques dans BODE des systèmes élémentaires

Pour réaliser le diagramme de Bode d'une fonction de transfert quelconque, il est donc nécessaire de connaître les diagrammes de Bode des fonctions de transfert élémentaires.

5.1. Réponses des systèmes simples

Gain pur :



$H(p) = K \rightarrow$ soit : $H(j\omega) = K$

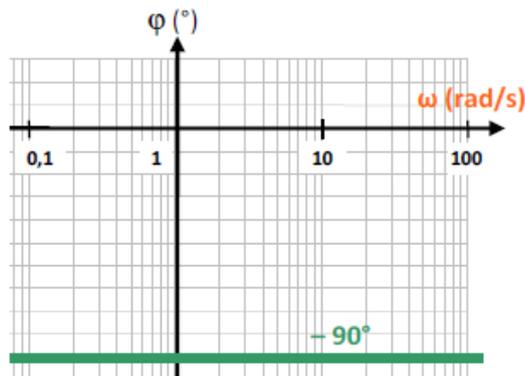
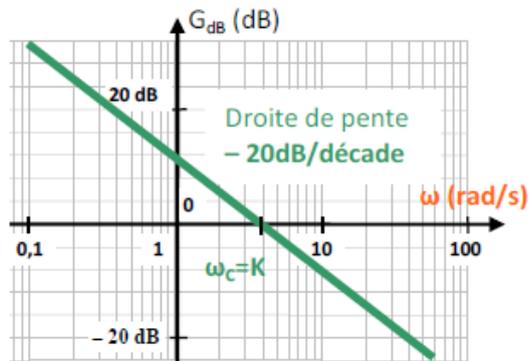
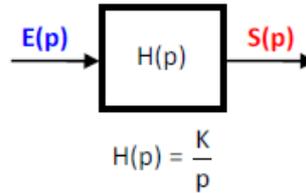
Gain en dB :

$G_{dB} = 20 \cdot \log(K)$

$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\tilde{0}}{K} = 0.$

Phase en degrés : $\varphi(\omega) = 0^\circ$

Intégrateur :



$H(p) = \frac{K}{p} \rightarrow$ soit : $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$

Gain en dB :

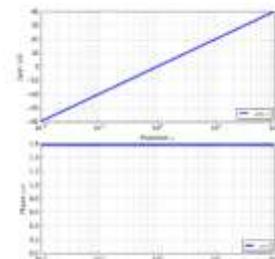
$G_{dB} = 20 \cdot \log \left| \frac{K}{j\omega} \right| = 20 \cdot \log(K) - 20 \cdot \log(\omega)$

Phase en degrés : $\varphi(\omega) = -90^\circ \rightarrow \varphi(\omega) = \arctan \frac{\tilde{0}}{K} - \arctan \frac{\omega}{0}$ tend vers $-\frac{\pi}{2}$.

Dérivateur \rightarrow



- $H(j\omega) = j\omega$. On a :
- $AdB(\omega) = 20 \log \omega = 20 \log \omega$;
- $\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{0}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$.



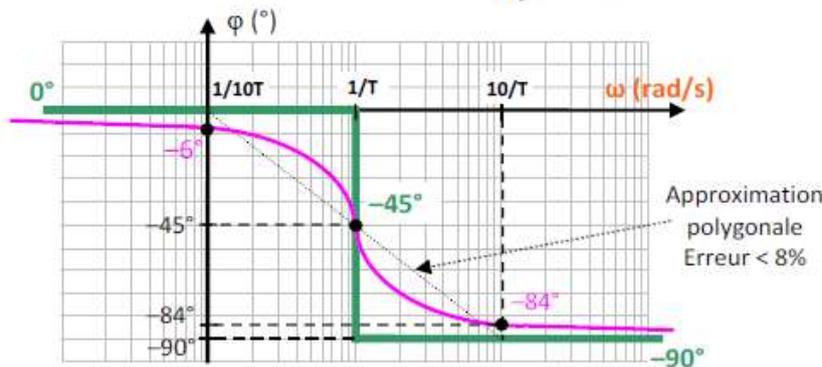
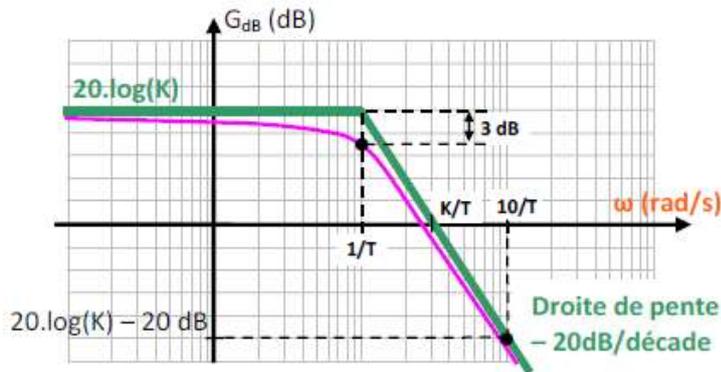
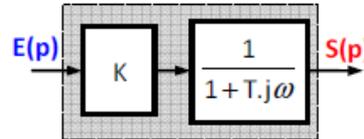


SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

5.2. Réponses des systèmes du 1^{er} ordre

Le système d'ordre 1 a pour fonction de transfert

$$H(p) = \frac{K}{1+T.p} \text{ soit } H(j\omega) = \frac{K}{1+T.j\omega}$$



- Le module (gain) s'exprime en décibels (dB).

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log K$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \log |H(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \log \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = 20 \log \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2}} = 20 \log \frac{K}{T\omega} = -20 \log \omega + 20 \log \frac{K}{T}$$

La courbe de gain admet deux asymptotes :

$$y_1 = 20 \log K$$

$$y_2 = -20 \log \omega + 20 \log \frac{K}{T}$$

La pente de l'asymptote y_2 est de -20dB par décade

On cherche la valeur de ω à l'intersection des deux asymptotes :

$$20 \log K = -20 \log \omega + 20 \log \frac{K}{T} \Rightarrow 20 \log K = -20 \log \omega + 20 \log K - 20 \log T \Rightarrow \omega = \frac{1}{T}$$

Cette pulsation est appelée pulsation de cassure : $\omega_c = \frac{1}{T}$



SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

Pour la valeur $\omega = \omega_c, |H(j\omega)| = 20 \log \frac{K}{\sqrt{2}}$.

Par rapport à de faibles valeurs de ω ($\lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log K$), le gain a donc diminué de :

$$20 \log K - 20 \log \frac{K}{\sqrt{2}} = -20 \log \sqrt{2} = -10 \log 2 = -3 \text{dB}$$

La bande de fréquence pour laquelle le gain est atténué de moins de 3dB est appelée bande passante à -3dB. La pulsation correspondant à une atténuation de -3dB est appelée pulsation de coupure à -3dB.

Pour une fonction de transfert du 1^{er} ordre la pulsation de cassure et la pulsation de coupure à -3dB sont identiques.

- L'argument (phase) s'exprime généralement en degré ou en radian.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Arg}(H(j\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow 0} -\text{Arc tan}(T\omega) = 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Arg}(H(j\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} -\text{Arc tan}(T\omega) = -90^\circ$$

La courbe de phase admet donc deux asymptotes :

$$y_3 = 0^\circ$$

$$y_4 = -90^\circ$$

Pour la valeur $\omega = \omega_c = \frac{1}{T}, \text{Arg}[H(j\omega)] = -\text{Arc tan}(T\omega_c) = -45^\circ$.

5.3. Réponses des systèmes du 2nd ordre

Le système d'ordre 2 a pour fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{(1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2)}$.

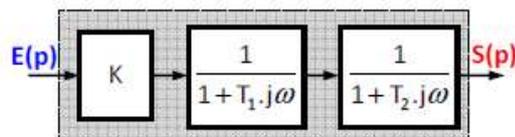
Soit $H(j\omega) = \frac{K}{(1 + \frac{2z}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2)}$ pour une étude fréquentielle.

- **Cas $z > 1$ ou $z = 1$**

La fonction de transfert présente 2 pôles réels p_1 et p_2 , distincts ou confondus.

Pour $z > 1$, le système peut être considéré comme le produit de deux systèmes de 1^{er} ordre de constantes de temps

$$T_1 = -\frac{1}{p_1} \text{ et } T_2 = -\frac{1}{p_2}$$



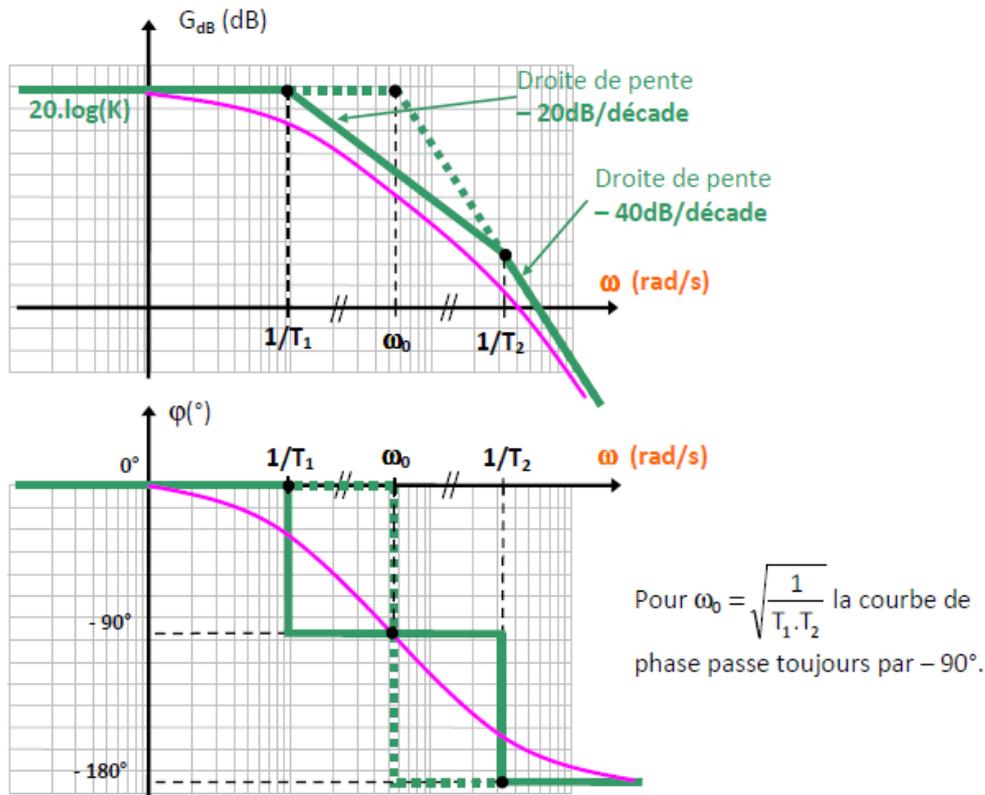
Le tracé asymptotique se construit alors en ajoutant les tracés du gain et des deux systèmes du premier ordre construits séparément dans un premier temps.

Pour $z = 1$, la fonction de transfert devient un carré parfait : $H(j\omega) = \frac{K}{(1 + T.j\omega)^2}$ avec

$T = \frac{1}{\omega_0}$. (seul son tracé asymptotique est représenté en pointillés sur la figure).



SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)



• Cas $z < 1$

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{K}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{K}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \text{ avec } s = j\omega \Rightarrow H(s) = H(j\omega) = \frac{K}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

En posant $u = \frac{\omega}{\omega_n}$ $H(j\omega) = \frac{K}{(1 - u^2) + j(2\xi u)}$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + (2\xi u)^2}}$$

Et $\text{Arg}[H(j\omega)] = \arg K - \arg[(1 - u^2) + j(2\xi u)] = 0 - \text{Arctan}(2\xi u / (1 - u^2))$

$$\text{Arg}[H(j\omega)] = -90^\circ + \text{Arc tan}\left(\frac{1 - u^2}{2\xi u}\right)$$

Car $\text{Arctan } x + \text{Arctan}(1/x) = 90^\circ$



 SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

Résonance

On dit qu'il y a résonance si le module de $H(j\omega)$ passe par un maximum.

Recherchons la valeur $\omega = \omega_r$ appelée pulsation de résonance, pour laquelle $H(j\omega)$ passe par un maximum

$$|H(j\omega)|' = -\frac{K}{2} [-4u(1-u^2) + 8\xi^2 u] [(1-u^2)^2 + (2\xi u)^2]^{-3/2}$$

$$|H(j\omega)|' = 0 \Rightarrow -4u(1-u^2) + 8\xi^2 u = 0 \Rightarrow -(1-u^2) + 2\xi^2 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 2\xi^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$\text{Condition d'existence de la résonance : } 1 - 2\xi^2 \geq 0 \Rightarrow \omega_r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Recherchons la valeur maximale du module :

$$|H(j\omega_r)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \left(\frac{\omega_r}{\omega}\right)\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - (1 - 2\xi^2)\right)^2 + \left(2\xi \sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{4\xi^2 - 4\xi^4}}$$

$$|H(j\omega_r)| = \frac{K}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Bode

- Le module (gain) s'exprime en décibels (dB).

$$\lim_{u \rightarrow 0} 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log K$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} 20 \log |H(j\omega)| = \lim_{u \rightarrow \infty} 20 \log \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\xi u)^2}} = 20 \log \frac{K}{u^2} = 20 \log K - 20 \log u^2 = 20 \log K - 40 \log u$$

La courbe de gain admet deux asymptotes :

$$y_1 = 20 \log K$$

$$y_2 = -40 \log u + 20 \log K$$

La pente de l'asymptote y_2 est de -40dB par décade

On cherche la valeur de ω à l'intersection des deux asymptotes :

$$20 \log K = -40 \log u + 20 \log K \Rightarrow \log u = 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow \omega = \omega_n$$

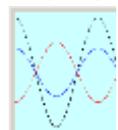
La pulsation propre non amortie ω_n est aussi la pulsation de cassure.

- L'argument (phase) s'exprime généralement en degré ou en radian.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \text{Arg}[H(j\omega)] = \lim_{u \rightarrow 0} \left(-90^\circ + \text{Arc tan} \left(\frac{1-u^2}{2\xi u} \right) \right) = 0^\circ$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \text{Arg}[H(j\omega)] = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(-90^\circ + \text{Arc tan} \left(\frac{1-u^2}{2\xi u} \right) \right) = -180^\circ$$

Un 2nd ordre peut aller jusqu'à une opposition de phase (180°)



La courbe de phase admet donc deux asymptotes :

$$y_3 = 0^\circ$$

$$y_4 = -180^\circ$$

Pour la valeur $\omega = \omega_n$, c'est à dire pour $u=1$:

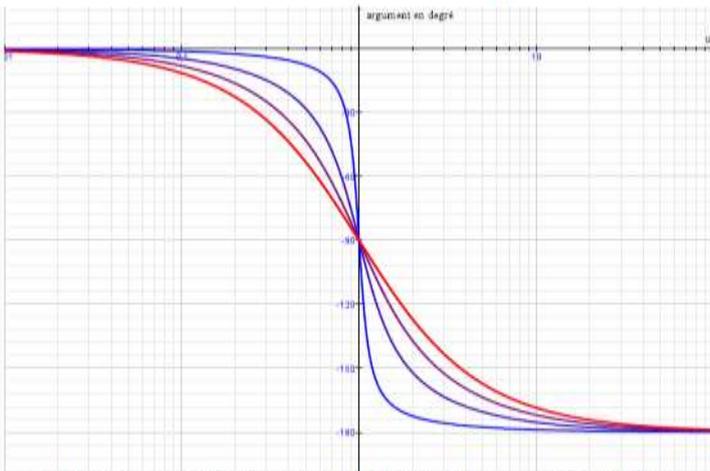
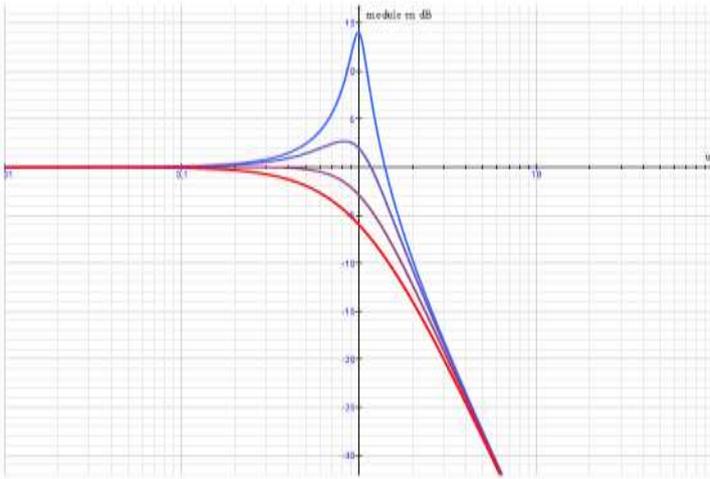
$$\text{Arg}[H(j\omega)] = -90^\circ + \text{Arc tan} \left(\frac{1-u^2}{2\xi u} \right) = -90^\circ.$$



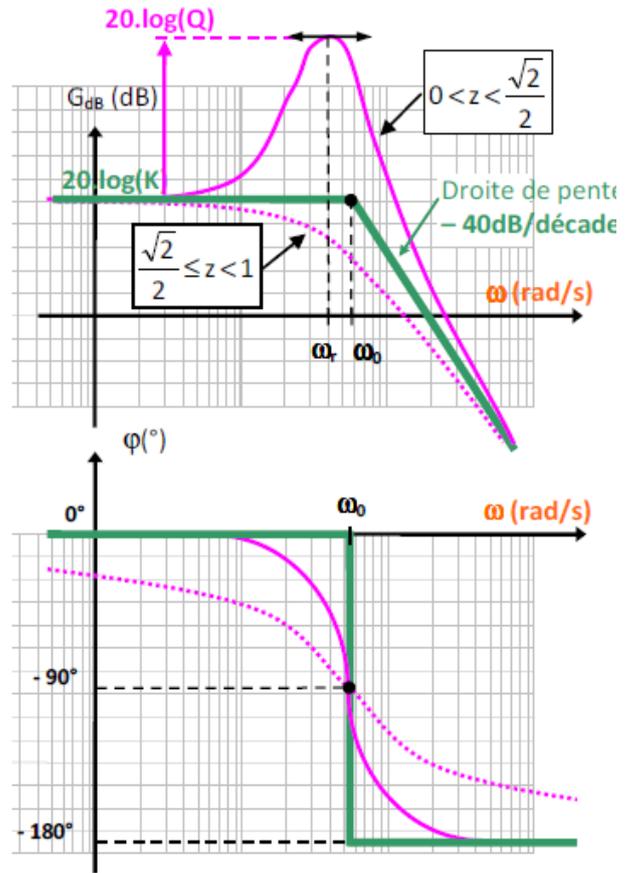
SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

Q : coefficient de surtension

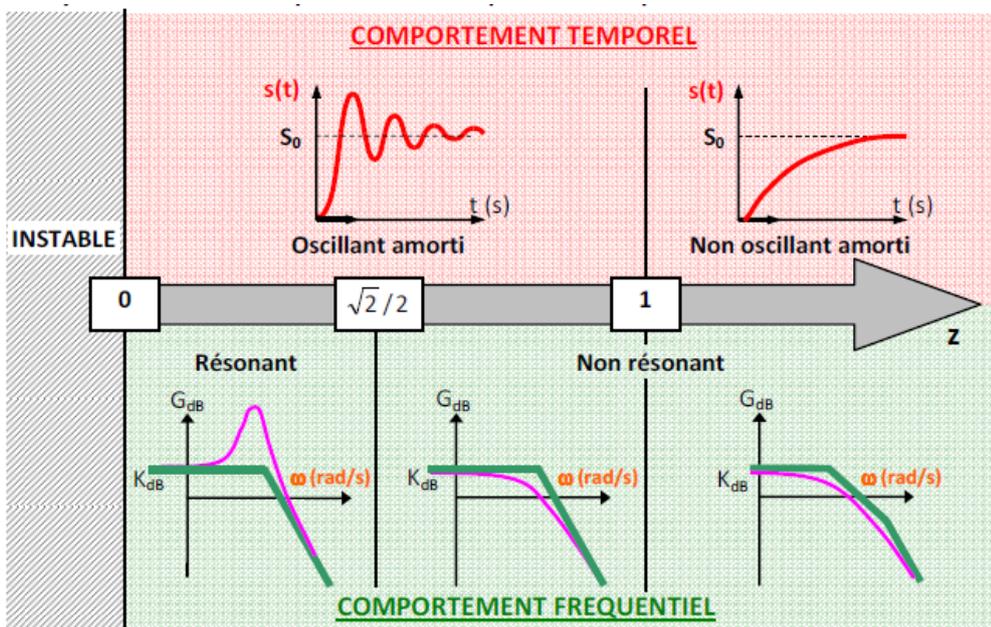
$$Q = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$$



Lieux de transfert pour différentes valeurs de ξ d'un système du deuxième ordre dans Bode



Synthèse sur le comportement temporel et fréquentiel d'un système du 2nd ordre :





SLCI : réponses harmoniques (diagrammes de Bode et Black)

6. Méthode de construction du diagramme de Bode de systèmes d'ordre quelconque

Etape n°1 : Mettre la fonction de transfert sous la forme d'un produit de fonction simple

Etape n°2 : Classer les constantes de temps dans un ordre décroissant, c'est à dire les pulsations de cassure ($1/T_i$ pour un 1^{er} ordre et ω_0 pour un 2nd ordre) correspondantes dans un ordre croissant. Les brisures du trace asymptotique correspondront alors à ces pulsations.

Etape n°3 : Construire le diagramme de Bode successivement en avançant vers les pulsations croissantes, faire intervenir les pôles et les zéros selon l'ordre précédent en utilisant les constructions asymptotiques.

Etape n°4 : Affiner le tracé asymptotique en combinant les courbes réelles.

