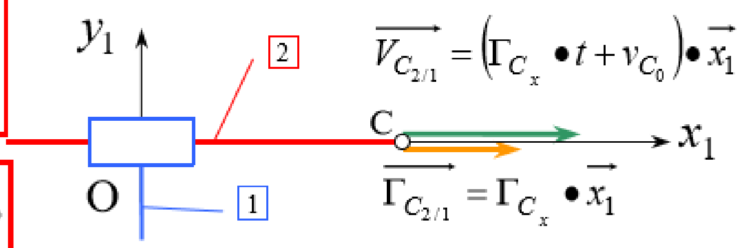
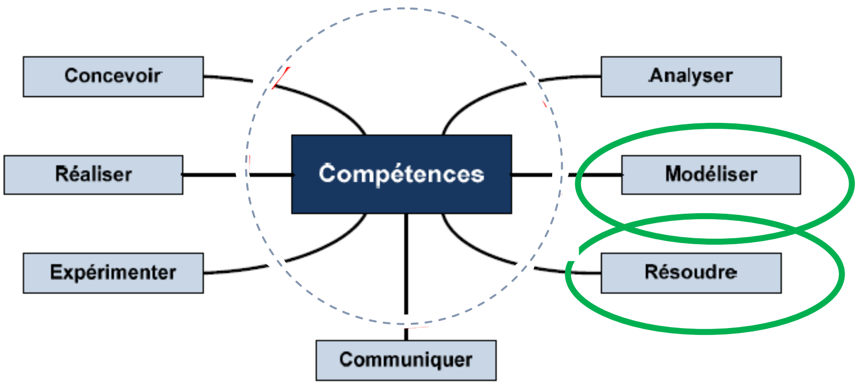
Cycle 3: Etude, modélisation des systèmes dynamiques à masse conservative

Révisions Mouvements Rectilignes (MRU-MRUV)

$$\boxed{\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{2} \bullet \ddot{x}_C \bullet t^2 + \dot{x}_{C_0} \bullet t + x_{C_0} \\ \dot{x}_C &= \ddot{x}_C \bullet t + \dot{x}_{C_0} \\ \ddot{x}_C &= Cte \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{2} \bullet \Gamma_{C_x} \bullet t^2 + v_{C_0} \bullet t + x_{C_0} \\ v_{C_x} &= \Gamma_{C_x} \bullet t + v_{C_0} \\ \Gamma_{C_x} &= Cte \end{aligned}}$$

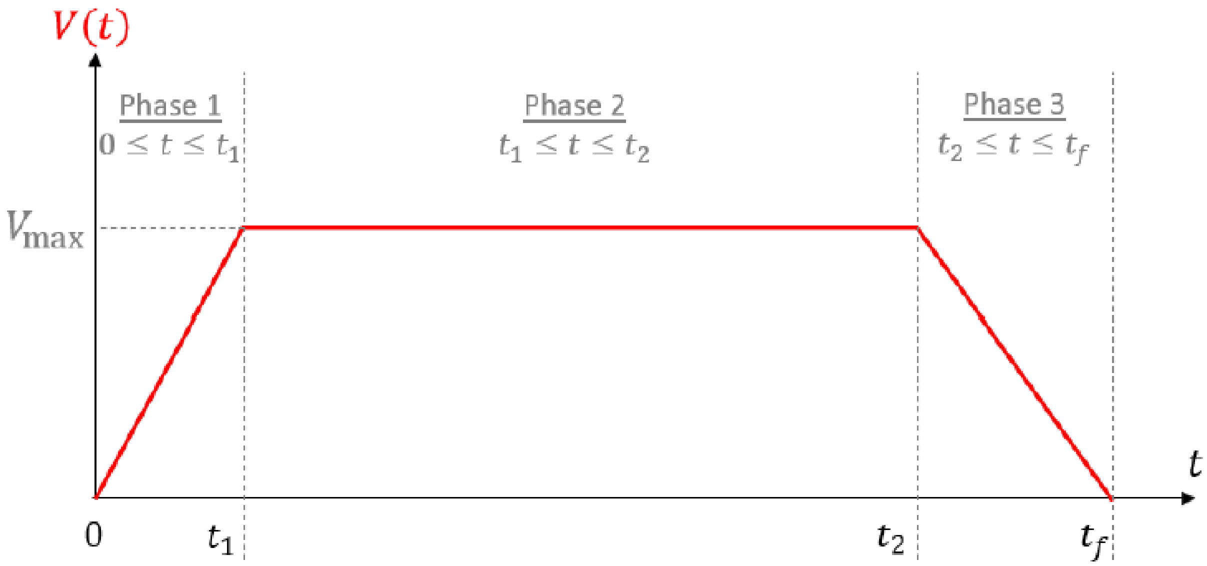




Rappels de PTSI : Trapèzes de vitesses

La plupart des systèmes mécatroniques (robotiques particulièrement) sont asservis en position (généralement *via* une boucle interne de vitesse). Une loi de **consigne** classique pour aller d'une position à une autre est la loi en **trapèze de vitesse**

Que l'on asservisse une vitesse linéaire $V(t)$ (en m.s^{-1}) ou une vitesse angulaire $\omega(t)$ (en rad.s^{-1}), la démarche est toujours la même :



- Phase 1 : $0 \leq t \leq t_1$ – *phase d'accélération*

  L'accélération est constante et vaut $a = \frac{dV}{dt} = \frac{V_{\max}-0}{t_1-0} = \frac{V_{\max}}{t_1} > 0$

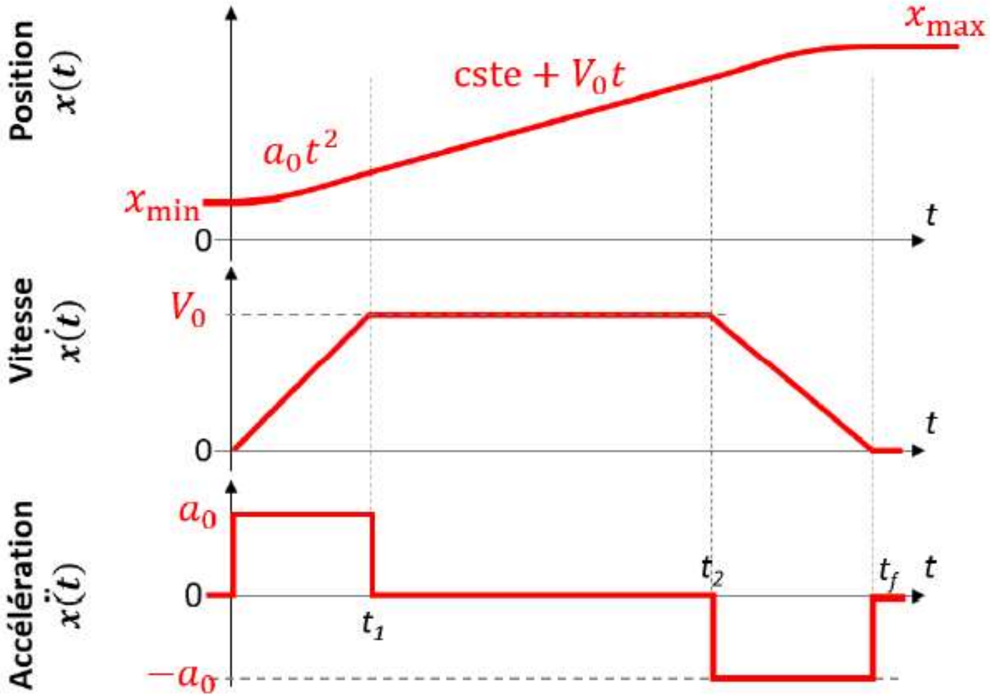
- Phase 2 : $t_1 \leq t \leq t_2$ – *plateau de vitesse* : la vitesse est constante
- Phase 3 : $t_2 \leq t \leq t_f$ – *phase de décélération, ou freinage*

  L'accélération est constante et vaut $a = \frac{dV}{dt} = \frac{0-V_{\max}}{t_f-t_2} = -\frac{V_{\max}}{t_f-t_2} < 0$

  Rmq : on parle parfois pour cette phase de **décélération**, où la décélération $d = -a$ est donc positive.

Pour conclure sur ce type de problème, il manque toujours une dernière équation, permettant entre autre de déterminer le temps que dure la phase 2 de plateau. Pour cela, une **course** est généralement fixée par le cahier des charges.

Il sera donc très important de garder en tête cette représentation :



Pour déterminer ce déplacement global, et conclure ce type d'exercice, il faut revenir à la définition du déplacement comme intégrale de la vitesse :

$$V(t) = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow dx = V(t)dt \Leftrightarrow [x(t)]_0^{t_f} = x(t_f) - x(0) = \int_0^{t_f} V(t)dt$$

On voit donc que la course (Δx ou $\Delta\theta$ suivant le type d'exercice) correspond à $\int_0^{t_f} V(t)dt$ et donc

A l'aire sous la courbe de vitesse

Je recommande, pour ce type d'exercice, de passer par une méthode graphique consistant à calculer l'aire totale sous la courbe en décomposant le problème en plusieurs phases :

- Phase 1 : $0 \leq t \leq t_1$ – *phase d'accélération*

  → A_1 = aire sous un triangle rectangle = ½ aire du rectangle = $\frac{1}{2} V_{\max} t_1$

- Phase 2 : $t_1 \leq t \leq t_2$ – *plateau de vitesse*

  → A_2 = aire sous un rectangle = $V_{\max}(t_2 - t_1)$

- Phase 3 : $t_2 \leq t \leq t_f$ – *phase de décélération*

  → A_3 = aire sous un triangle rectangle = ½ aire du rectangle = $\frac{1}{2} V_{\max}(t_f - t_2)$

D'où aire totale = course = $A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2} V_{\max}[t_1 + 2(t_2 - t_1) + t_f - t_2] = \frac{1}{2} V_{\max}[t_2 - t_1 + t_f]$