Résolution d'équation différentielle ordre 1
Euler - Heun - RK4

Soit les problèmes de Cauchy :

$$(\mathscr{P})\left\{\begin{array}{l} y(a)=y0 \\ \forall\, t\in[a,b],\ y'(t)=f(y(t),t)\end{array}\right.$$

$$(\mathscr{P}_{\text{test}})\left\{\begin{array}{l} y(0)=1 \\ \forall\, t\in[0,1],\ y'(t)-y(t)=0.\end{array}\right.$$

(1) **Euler :** Programmer la fonction `Euler` qui a pour entrées $a, b, y0, f, n$ et renvoie le couple T, Y où T est la liste des points de discrétisation de l'intervalle $[a,b]$ et Y la liste des valeurs approchées de la solution de $\mathscr{P}$. Tracer la solution approchée et la solution exacte de $(\mathscr{P}_{\text{test}})$ dans une même fenêtre pour n dans $\{2,4,8,16\}$. Commenter.

(2) Dans les méthodes suivantes, on rappelle que y_i est une approximation de $y(t_i)$ valeur de la solution de $(\mathscr{P})$ en t_i où t_i est construit par récurrence $t_0=a$ et $t_{i+1}=t_i+h$ et $h=\frac{b-a}{n}$.

Méthode de Heun :

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}(f(y_i,t_i)+f(y_i+hf(y_i,t_i),t_{i+1}))$$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_i &=& y_i+\frac{h}{2}f(y_i,t_i)\\
\beta_i &=& y_i+\frac{h}{2}f(\alpha_i,t_i+h/2)\\
\gamma_i &=& y_i+hf(\beta_i,t_i+h/2)\\
y_{i+1} &=& y_i+\frac{h}{6}(f(y_i,t_i)+2f(\alpha_i,t_i+h/2)+2f(\beta_i,t_i+h/2)+f(\gamma_i,t_{i+1}))
\end{array}$$

(a) Programmer les fonctions `Heun`, `Rk4` qui ont pour entrées $a, b, y0, f, n$ et renvoie le couple T, Y où T est la liste des points de discrétisation de l'intervalle $[a,b]$ et Y la liste des valeurs approchées de la solution de $(\mathscr{P})$ suivant la méthode utilisée. Tester ces fonctions les unes après les autres sur $(\mathscr{P}_{\text{test}})$, pour cela tracer dans une même fenêtre graphique la solution exacte de $(\mathscr{P}_{\text{test}})$ et la solution approchée de Heun pour $n=10$, puis de Runge-Kutta 4 toujours pour $n=10$.

(b) Sauvegarder, dans un fichier nommé R2(b).txt, l'erreur $E(h)=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\left|y(t_i)-y_i\right|$ en fonction de $h=\frac{b-a}{n}$ pour les méthodes d'Euler, Heun et Runge-Kutta 4 pour résoudre $(\mathscr{P}_{test})$, sous la forme suivante :

```
Euler
-------------------
|       h|  Erreur|
|1.00e-01|1.25e-01|
|1.00e-02|1.35e-02|
|1.00e-03|1.36e-03|
-------------------
Heun
-------------------
|       h|  Erreur|
|1.00e-01|4.20e-03|
|1.00e-02|4.50e-05|
|1.00e-03|4.53e-07|
-------------------
Rk4
-------------------
|       h|  Erreur|
|1.00e-01|2.08e-06|
|1.00e-02|2.25e-10|
|1.00e-03|2.26e-14|
-------------------
```

On pourra utiliser le fichier rappel_fichier.py dans le répertoire élève. En déduire que la méthode d'Euler est une méthode d'ordre un, la méthode de Heun est d'ordre deux et celle de Runge-Kutta est d'ordre quatre.