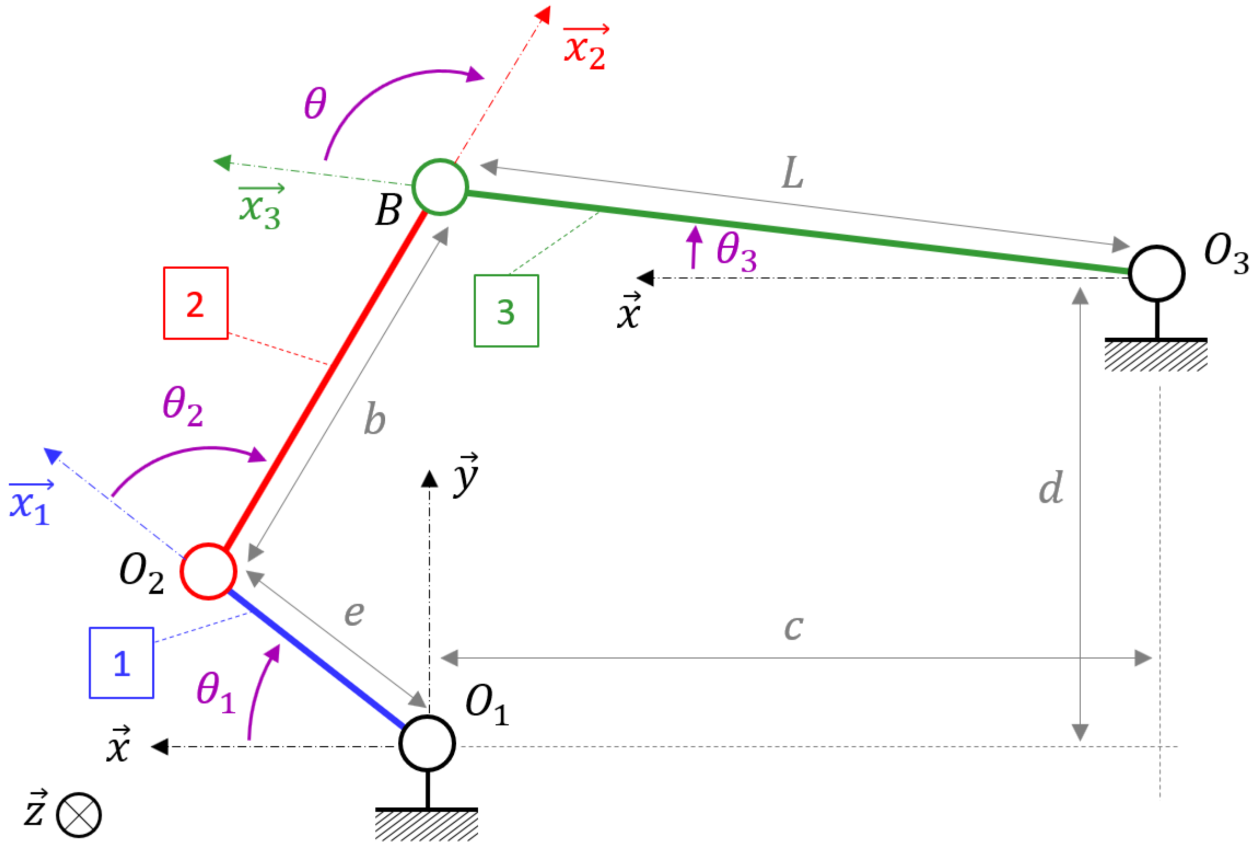
Exercice 1 : Agitateur

On s'intéresse à un système permettant d'agiter un porte-échantillons biologiques (enceinte thermostatée située en bout de bras), permettant d'éviter que les cellules contenues dans un échantillon sanguin ne sédimentent sous l'effet de la gravité.

Une biellette [1], entraînée en rotation d'axe $(O_1\vec{z})$ par un moteur tournant à vitesse $\omega_m = \frac{d\theta_1}{dt}$, communique son mouvement à une manivelle [2], qui entraîne le bras oscillant [3] en rotation alternative autour de l'axe $(O_3\vec{z})$.

Le paramétrage retenu est donné ci-dessous :



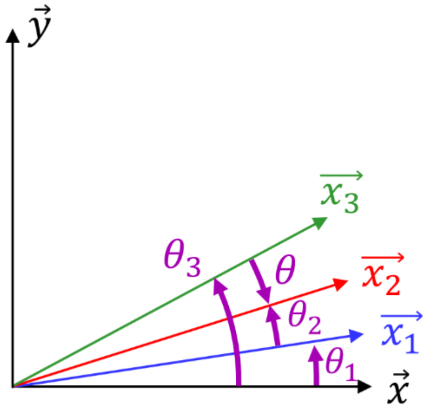
Q1 – Représenter sur une même figure géométrale (angles petits et directs, vecteur $\vec{z}$ sortant) les vecteurs $\vec{x}, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{x_3}$. En déduire l'expression de l'angle θ en fonction de θ_1, θ_2 et θ_3.

Q2 – Écrire la fermeture géométrique de ce système, en considérant θ_1 comme une entrée et θ_3 comme une sortie.

Q3 – Dériver la loi entrée-sortie précédente pour en déduire l'expression d'une loi entrée-sortie cinématique $\dot{\theta}_3/\omega_m$ à exprimer en fonction de θ_1 et θ_3.

CORRIGE

Q1 – On a, d'après les figures, $\theta_1 = (\vec{x}, \vec{x_1})$; $\theta_2 = (\vec{x}, \vec{x_2})$; $\theta = (\vec{x_3}, \vec{x_2})$ et $\theta_3 = (\vec{x}, \vec{x_3})$. D'où la figure géométrale :



On a alors directement $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 - \theta$ donc $\theta = \theta_1 + \theta_2 - \theta_3$

Q2 – Fermeture géométrique $\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2B} + \overrightarrow{BO_3} + \overrightarrow{O_3O_1} = \vec{0}$ donc avec le paramétrage de la figure :
$e\vec{x_1} + b\vec{x_2} - L\vec{x_3} + c\vec{x} - d\vec{y} = \vec{0}$

Projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y})$:

$$\begin{cases} e\cos\theta_1 + b\cos(\theta_1 + \theta_2) - L\cos\theta_3 + c = 0 \\ e\sin\theta_1 + b\sin(\theta_1 + \theta_2) - L\sin\theta_3 - d = 0 \end{cases}$$

On veut faire disparaître θ_2 (angle interne au mécanisme), donc on isole les termes en $(\theta_1 + \theta_2)$:

$$\begin{cases} b\cos(\theta_1 + \theta_2) = L\cos\theta_3 - c - e\cos\theta_1 \\ b\sin(\theta_1 + \theta_2) = L\sin\theta_3 + d - e\sin\theta_1 \end{cases}$$

Puis on élève au carré :

$$b^2 = (L\cos\theta_3 - c - e\cos\theta_1)^2 + (L\sin\theta_3 + d - e\sin\theta_1)^2$$

$$\rightarrow b^2 = L^2 + c^2 + d^2 + e^2 - 2cL\cos\theta_3 - 2eL\cos\theta_1\cos\theta_3 + 2ce\cos\theta_1 + 2dL\sin\theta_3 - 2eL\sin\theta_1\sin\theta_3 - 2de\sin\theta_1$$

$$\boxed{b^2 = L^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2L(d\sin\theta_3 - c\cos\theta_3) - 2eL\cos(\theta_1 - \theta_3) - 2e(d\sin\theta_1 - c\cos\theta_1)}$$

Q3 – On dérive la relation précédente par rapport au temps :

$$0 = 2L\left(d\dot{\theta}_3\cos\theta_3 + c\dot{\theta}_3\sin\theta_3\right) + 2eL\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3\right)\sin(\theta_1 - \theta_3) - 2e\left(d\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + c\dot{\theta}_1\sin\theta_1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[-2L(d\cos\theta_3 + c\sin\theta_3) + 2eL\sin(\theta_1 - \theta_3)\right]\dot{\theta}_3 = \left[+2eL\sin(\theta_1 - \theta_3) - 2e(d\cos\theta_1 + c\sin\theta_1)\right]\omega_m$$

D'où

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_3}{\omega_m} = \frac{eL\sin(\theta_1 - \theta_3) - e(d\cos\theta_1 + c\sin\theta_1)}{-L(d\cos\theta_3 + c\sin\theta_3) + eL\sin(\theta_1 - \theta_3)} = \frac{e}{L} \times \frac{L\sin(\theta_1 - \theta_3) - d\cos\theta_1 - c\sin\theta_1}{e\sin(\theta_1 - \theta_3) - d\cos\theta_3 - c\sin\theta_3}}$$