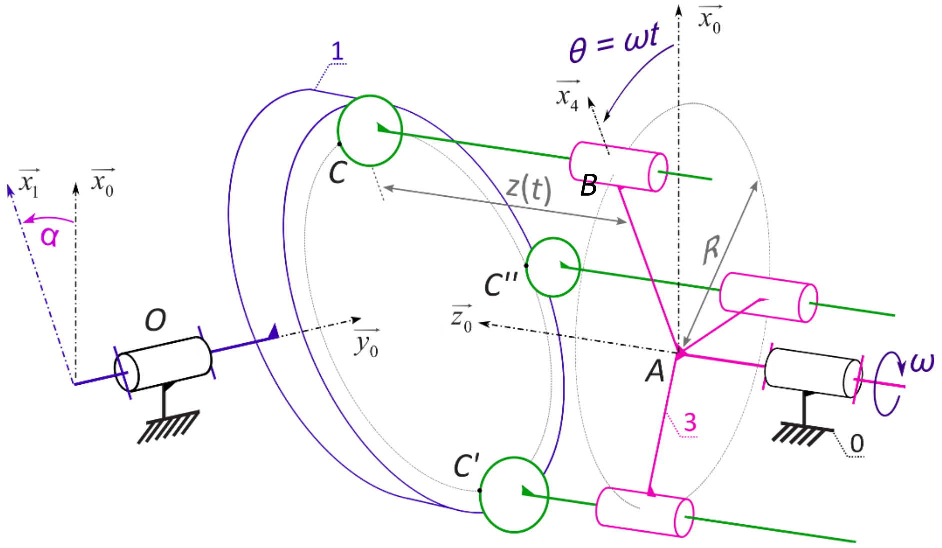
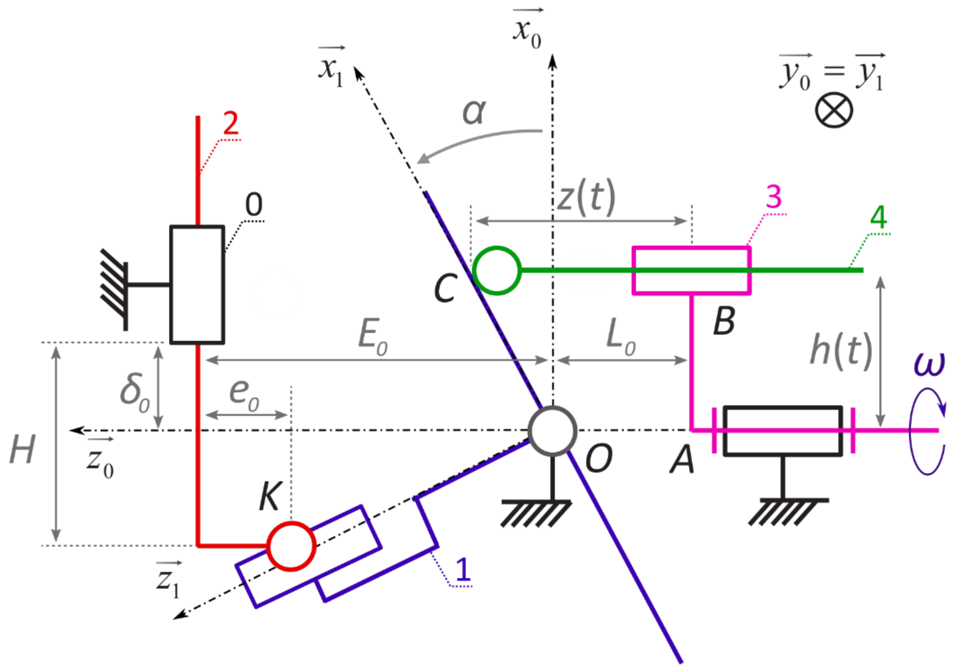
Exercice 2 : **Pompe à pistons axiaux**

Le fonctionnement d'une pompe à pistons axiaux peut être compris en regardant les deux vidéos suivantes (très courtes) : vidéo 1 et vidéo 2.



Un paramétrage en vue 3D est donné ci-contre, pour une pompe à 3 pistons. Le système de réglage de l'inclinaison (et donc du débit) est précisé sur la vue plane ci-dessous. La glissière entre *0* et *2*, de direction $\overrightarrow{x_0}$, permet d'ajuster la longueur *H*, faisant varier l'inclinaison α du plan *1*, qui tourne par rapport au bâti autour d'un axe $(O, \overrightarrow{y_0})$. Le contact ponctuel (en *C*) des pistons *4* sur ce plan incliné *1* fait varier la longueur de sortie de tige *z*(*t*), car ces pistons sont en liaison pivot glissant d'axe $(B, \overrightarrow{z_0})$ avec le rotor *3*. Le rotor *3* est, lui, guidé en liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$ par rapport au bâti, et tourne à vitesse $\dot{\theta} = \omega$.



On notera :

$$\overrightarrow{OC} = \lambda(t)\overrightarrow{x_1} + \mu(t)\overrightarrow{y_1}$$

où *C* est le point de contact d'un piston sur le plan incliné *1* $(O\ \overrightarrow{x_1}\ \overrightarrow{y_1})$, et parcourt donc sur ce dernier une trajectoire elliptique représentée sur la vue 3D. On ne souhaite pas déterminer les expressions de $\lambda(t)$ ni $\mu(t)$.

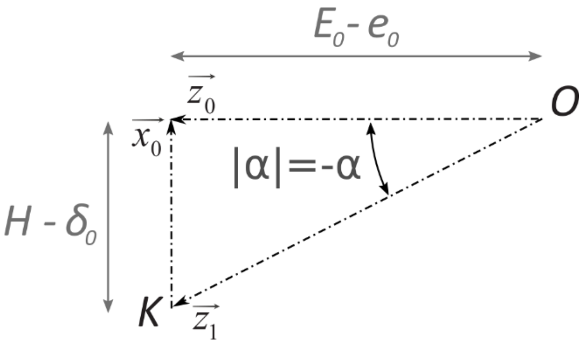
Q1 – Sur le schéma, quel est le signe de l'angle α ? En étudiant le système de réglage de l'angle du plan incliné [1], déterminer l'expression de α en fonction de *H*.

Q2 – Tracer les figures de changement de base permettant de faire apparaître les angles α et θ.

Q3 – A l'aide d'une fermeture géométrique, projetée sur $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$, exprimer $z(t)$ en fonction de $\theta(t) = \omega t$.
Quelle est la course *c* du piston, en fonction de *H* ?

CORRIGE

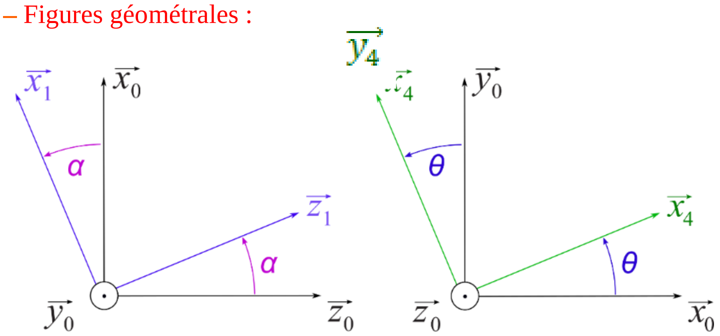
Q1 – L'angle α est ici représenté négatif. Pour le système de réglage de l'inclinaison du plan, on a le triangle suivant :



D'où, si l'on raisonne sur un angle non orienté

$$\tan(|\alpha|) = \frac{H-\delta_0}{E_0 - e_0} \Rightarrow |\alpha| = \text{Atan}\left(\frac{H-\delta_0}{E_0 - e_0}\right)$$

Q2 – Figures géométrales :



Q3 – On veut écrire $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$.

Sur les schéma paramétrés, on voit que $\overrightarrow{OA} = -L_0\vec{z_0}$, que $\overrightarrow{AB} = R\vec{x_4}$ et $\overrightarrow{BC} = z(t)\vec{z_0}$.

Ainsi : $-L_0\vec{z_0} + R\vec{x_4} + z(t)\vec{z_0} - \lambda(t)\vec{x_1} - \mu(t)\vec{y_1} = \vec{0}$

d'où en projetant $\begin{array}{l} /\vec{x_0} \\ /\vec{z_0} \end{array}\begin{cases} 0 + R\cos(\theta) + 0 - \lambda(t)\cos(\alpha) - 0 = 0 \\ -L_0 + 0 + z(t) - \lambda(t)(-\sin(\alpha)) - 0 = 0 \end{cases}$

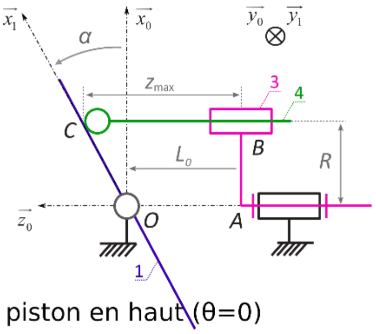
On veut éliminer $\lambda(t)$ distance, donc on l'isole, et on fait ligne 2 / ligne 1

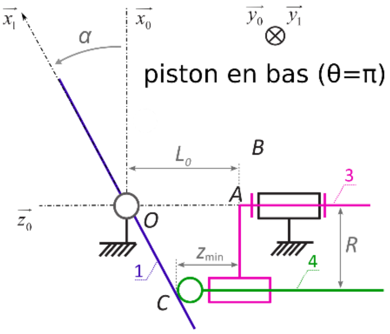
$$\begin{cases} \lambda(t)\cos(\alpha) = R\cos(\theta) \\ \lambda(t)\sin(\alpha) = L_0 - z(t) \end{cases} \xRightarrow[(ii)/(i)]{} \tan(\alpha) = \frac{L_0 - z(t)}{R\cos(\theta)}$$

D'où $\boxed{L_0 - z(t) = R\tan(\alpha)\cos(\theta) \Leftrightarrow z(t) = L_0 - R\tan(\alpha)\cos(\theta)}$

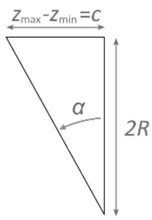
Les 2 longueurs extrêmes de sortie de tige $z(t)$ sont atteintes pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (voir schéma 3D page 1)

et sont $z_{max} = L_0 + R\tan(\alpha)$ et $z_{max} = L_0 - R\tan(\alpha)$ d'où une course $c = |z_{max} - z_{min}| = 2R\tan(\alpha)$





donc débattement :



En effet, sur figure ci-dessus on a (triangle) : $\tan(\alpha) = \frac{c}{2R}$