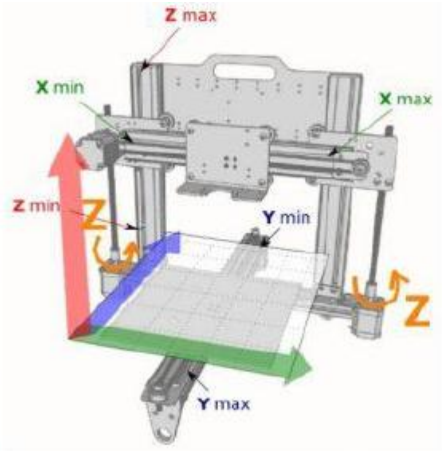
TD Trapèzes de vitesse

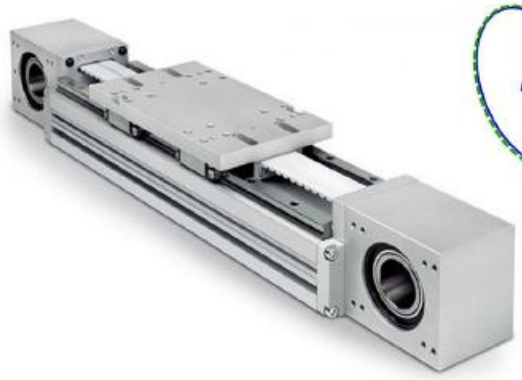
Exercice 1 : Commande d'axe

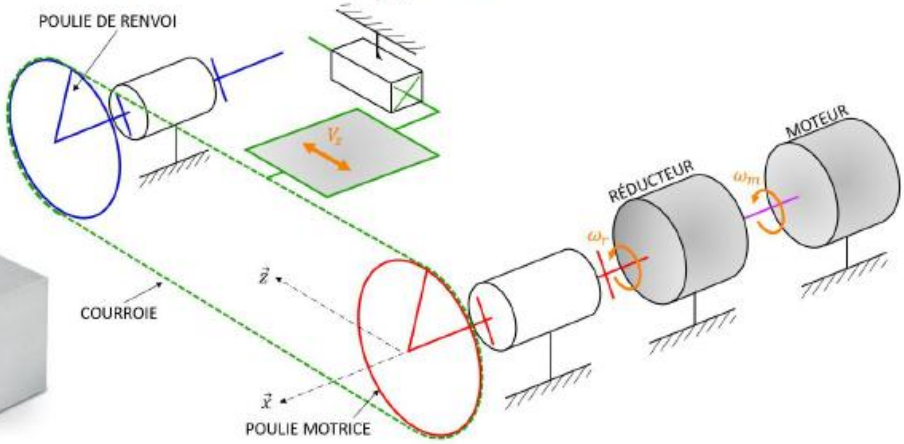


La plupart des imprimantes 3D utilisent une cinématique dite *Cartésienne*, c'est-à-dire qu'on peut les piloter en translation suivant 3 degrés de liberté orthogonaux, généralement appelés *X*, *Y* et *Z*. Le plus souvent, chacun de ces 3 DDL en translation est piloté par un bloc moto-réducteur et un axe linéaire, composé de deux poulies, dont une motorisée par un moto-réducteur, entraînant une courroie tendue entre les deux poulies, courroie qui entraîne elle-même la translation d'un plateau, lié en glissière par rapport au bâti.

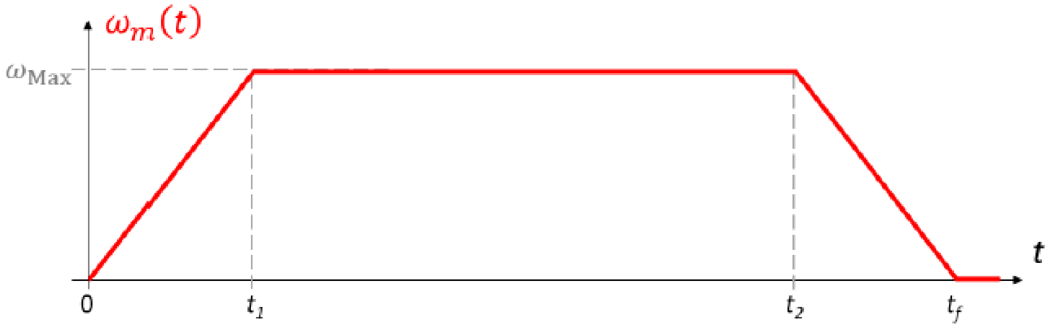
Ce mécanisme est représenté ci-dessous, pour un exemple d'un des trois axes motorisés (ici le DDL suivant *Z*). On note ω_m la vitesse de rotation du moteur par rapport au bâti, ω_r la vitesse de rotation la poulie motrice, et V_z la vitesse de translation du plateau.

On donne $V_z = R\omega_r$ avec R le rayon de la poulie motrice, et $k = \frac{\omega_r}{\omega_m}$ le rapport de réduction du réducteur.





Le moteur est asservi en vitesse, et suit une consigne en trapèze de vitesse représentée ci-dessous :



Le CDC impose que la course du plateau soit Δz, parcourue lors de ce trapèze de vitesse, et impose la valeur du temps total t_f. Finalement, le CDC impose également le couple maximal (en valeur absolue) C_{Max} que doit fournir le moteur. La commande est symétrique, c'est-à-dire que l'accélération $\dot{\omega}_{\text{Max}}$ entre $t = 0$ et t_1 vaut la décélération entre t_2 et t_f.

Q1 – Montrer que $t_f - t_2 = t_1$

Le principe fondamental de la dynamique, en moment, appliqué sur l'arbre moteur, donne : $J_{eq}\frac{d\omega_m}{dt} = C_m(t) - C_0$, avec J_{eq} (inertie équivalente de l'ensemble ramenée à l'arbre moteur) et C_0 (couple de frottement sec) constantes positives.

Q2 – Tracer l'allure du couple $C_m(t)$ pour $0 \leq t \leq t_f$: quelle est l'expression du couple maxi C_{Max} (en valeur absolue) ?

Q3 – Déterminer un système de trois équations liant les inconnues ω_{Max} , t_1 et t_2 et les grandeurs imposées par le CDC.

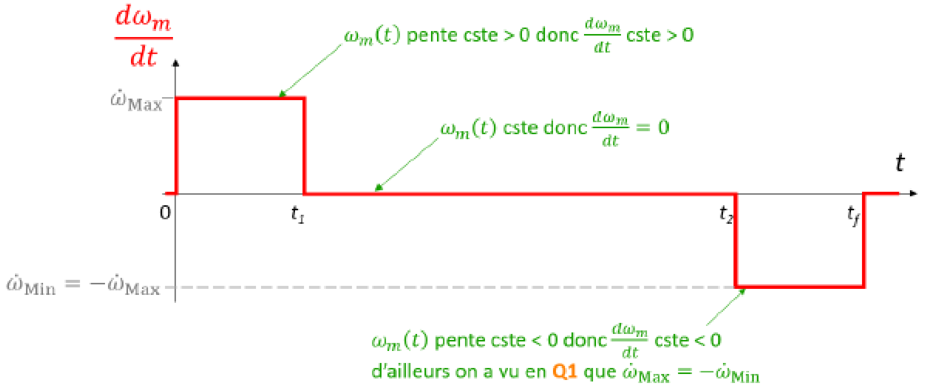
TD Trapèzes de vitesse

Q1 – Pour $0 \leq t \leq t_1$: accélération constante positive : $\frac{d\omega_m}{dt} = \dot{\omega}_{\text{Max}} = \frac{\omega_{\text{Max}}}{t_1} > 0$

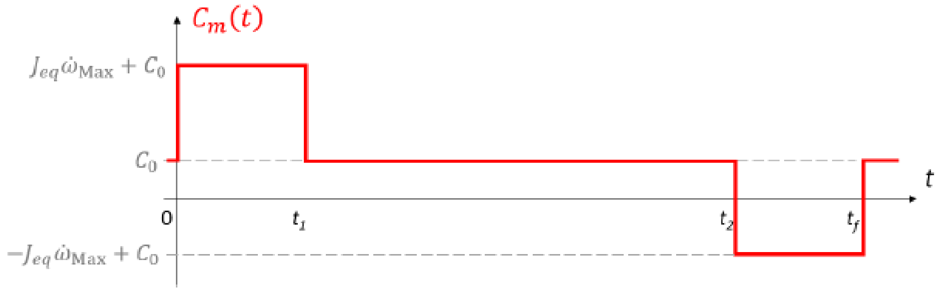
Pour $t_2 \leq t \leq t_f$: accélération constante négative : $\frac{d\omega_m}{dt} = \dot{\omega}_{\text{Min}} = \frac{0-\omega_{\text{Max}}}{t_f - t_2} < 0$, or l'énoncé dit que la commande est **symétrique**, c'est-à-dire que $\dot{\omega}_{\text{Max}} = -\dot{\omega}_{\text{Min}}$

Donc $\frac{\omega_{\text{Max}}}{t_1} = \frac{\omega_{\text{Max}}}{t_f - t_2}$ d'où $t_f - t_2 = t_1$.

Q2 – D'après l'équation donnée $C_m(t) = J_{eq}\frac{d\omega_m}{dt} + C_0$. On peut donc tracer la dérivée $\frac{d\omega_m}{dt}$ (en dérivant le trapèze) :



D'où, en multipliant par J_{eq} puis en ajoutant $C_0 > 0$ (on translate la courbe précédente vers le haut) :



Rmq : vous pouviez donner cette courbe directement, sans passer par l'étape intermédiaire du tracé de $\frac{d\omega_m}{dt}$.

Le couple maximal, en valeur absolue, est fourni entre $t = 0$ et t_1 et vaut $C_{\text{Max}} = J_{eq}\dot{\omega}_{\text{Max}} + C_0$.

Q3 – On a trois inconnues, il nous faut 3 équations. La première vient d'être trouvée en **Q1** : $t_1 + t_2 = t_f$

On se sert ensuite de l'équation trouvée en **Q2** : $C_{\text{Max}} = J_{eq}\dot{\omega}_{\text{Max}} + C_0$ avec $\dot{\omega}_{\text{Max}} = \frac{\omega_{\text{Max}}}{t_1}$ d'où $\omega_{\text{Max}} = \frac{C_{\text{Max}} - C_0}{J_{eq}}\ t_1$

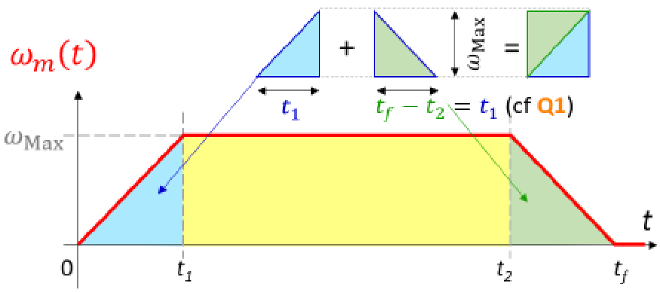
Et finalement le nombre de radians $\Delta\theta_m$ parcourus par l'axe moteur pendant le trapèze est l'aire sous la courbe.

Attention ! Le piège est de penser que l'aire sous la courbe était Δz. En effet $\int \omega_m dt$ est en rad/s x s = rad, pas en m !

Ainsi, si l'on note $\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt}$ alors Aire sous la courbe $= \int \omega_m dt = \int \frac{d\theta_m}{dt} dt = \int d\theta_m = \Delta\theta_m$.

Rmq : on peut gagner un tout petit peu de temps, en remarquant que l'aire des deux triangles rectangle, puisqu'ils ont la même hauteur (ω_{Max}) et la même base (t_1) se combine en l'aire d'un seul rectangle, d'aire $t_1 \times \omega_{\text{Max}}$ comme illustré ci-contre.

Entre t_1 et t_2 on n'a qu'à calculer l'aire d'un rectangle : $\omega_{\text{Max}} \times (t_2 - t_1)$



$$\Delta\theta_m = \omega_{\text{Max}} \times t_1 + \omega_{\text{Max}} \times (t_2 - t_1) = \omega_{\text{Max}} \times (t_2 - t_1 + t_1) = \omega_{\text{Max}} \times t_2$$

Rmq : on aurait pu l'écrire directement en déplaçant le triangle vert à gauche du triangle bleu → grand rectangle.

On a $V_z = R\omega_r = Rk\omega_m$ avec $V_z = \frac{dz}{dt}$ et $\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt}$ donc $\frac{dz}{\cancel{dt}} = Rk\frac{d\theta_m}{\cancel{dt}}$ d'où en intégrant $\Delta z = Rk\,\Delta\theta_m = Rk\omega_{\text{Max}} \times t_2$

D'où $\begin{cases} t_1 + t_2 = t_f \\ \omega_{\text{Max}} = \frac{C_{\text{Max}} - C_0}{J_{eq}}\ t_1 \\ \Delta z = Rk\omega_{\text{Max}} \times t_2 \end{cases}$ Rmq : la résolution n'est pas demandée ici.